CÁLCULO

Autor do original: Gilbert STRANG

Tradução e revisão: Martin WEILANDT
Versão: 27 de Agosto de 2011

Ele é uma tradução parcial e inoficial do seguinte livro:
Strang, Gilbert. RES.18-001 Calculus Online Textbook, Spring 2005. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare), `http://ocw.mit.edu` (Accessed 18 Aug, 2011). License: Creative Commons BY-NC-SA

Conteúdo

12 Movimento ao longo de uma curva

12.1 Posição de um Vetor

Neste capítulo estudaremos "funções vetoriais". O vetor $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ é constante. O vetor $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ está se movendo. Esta é uma função de parâmetro t, que frequentemente representa tempo. No momento t, o vetor posição $\mathbf{R}(t)$ localiza o corpo em movimento:

$$\textbf{\textit{vetor posição}} = \mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{12.1}$$

Por exemplo, $x = t,\ y = t^2, z = t^3$. Como t varia, estes pontos traçam uma ***curva no espaço***. O parâmetro t nos diz quando o corpo passa em que ponto na curva. O vetor constante $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ é o vetor posição $\mathbf{R}(2)$ no instante $t = 2$.

Quais são as perguntas a serem feitas? Todo estudante de cálculo conhece a primeira questão: *Encontre a derivada.* Se algo se move, a Marinha o saúda e nós o diferenciamos. Num determinado instante, o corpo em movimento ao longo da curva tem uma velocidade e uma direção. Esta informação está em outra função vetorial – o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$, que é a derivada de $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{12.2}$$

Desde que $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são vetores fixos, suas derivadas são nulas. Em coordenadas polares, $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são substituídos por vetores em movimentos. Então a velocidade $\mathbf{v}$ tem mais termos da regra do produto (Secção **??**).

Dois importantes casos são movimento uniforme ***retilíneo e circular***. Nós estudamos estes movimentos em detalhes ($\mathbf{v}$ = constante na reta, $\mathbf{v}$ = tangente ao círculo). Nesta secção também trabalharemos a velocidade, distância e aceleração de qualquer movimento $\mathbf{R}(t)$.

A equação (12.2) é a regra para calcular a velocidade $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$. Esta não é a *definição* de $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$, o que nos leva ao básico e não depende de coordenadas:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}.$$

Repetimos: $\mathbf{R}$ é um vetor então $\Delta\mathbf{R}$ é um vetor e consequentemente $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ também o é. Estes três vetores estão na Figura 12.1 (t não é um vetor!). Esta figura revela o fator chave sobre a geometria: ***A velocidade*** $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ ***é tangente à curva***.

O vetor $\Delta\mathbf{R}$ vai de um ponto na curva para um ponto próximo. Dividindo por Δt mudando seu comprimento, não sua direção. Esta direção alinha-se à reta tangente de acordo com a proximidade dos pontos.

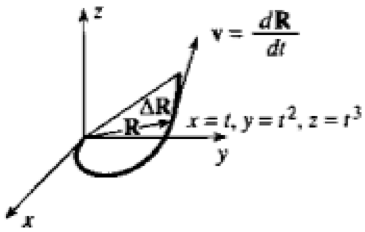

Figura 12.1: Posição $\mathbf{R}$, variação $\Delta\mathbf{R}$, velocidade $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$.

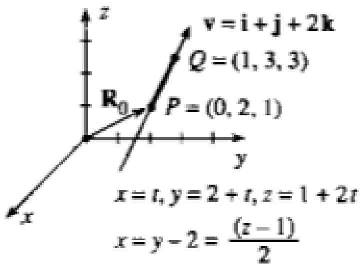

Figura 12.2: Equação de uma linha, com e sem o parâmetro t.

EXEMPLO 1. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

Esta curva sobe quando t aumenta. Quando $t = 0$, a velocidade é $\mathbf{v} = \mathbf{i}$. A tangente está ao longo do eixo x, desde que as componentes $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são zero. Quando $t = 1$, a velocidade é $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, e a curva está subindo.

Para obter a sombra no plano xy, anule a componente $\mathbf{k}$. A posição na sombra é $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. A velocidade ao longo da sombra é $\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. A sombra é uma curva plana.

EXEMPLO 2. Movimento uniforme em uma linha reta: ***o vetor velocidade* $\mathbf{v}$ *é constante.***

A velocidade e a direção não mudam. O vetor posição se move com $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + t\mathbf{v} \quad (\mathbf{R}_0 \text{ fixo, } \mathbf{v} \text{ fixo, } t \text{ variando}) \tag{12.3}$$

Esta é a ***equação de uma linha*** na forma vetorial. De fato, $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = v$. O ponto inicial $\mathbf{R}_0 = x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$ é dado. A velocidade $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ também é dada. Separando as componentes x, y e z, a equação (12.3) para uma reta é

$$\textbf{\textit{reta com parâmetro}}: \; x = x_0 + tv_1, \; y = y_0 + tv_2, \; z = z_0 + tv_3 \tag{12.4}$$

A velocidade ao longo da reta é $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. A direção de uma reta é o vetor unitário $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Nós temos três equações para x, y, z, e, eliminando t, obtemos duas. O parâmetro t ígual a $(x - x_0)/v_1$ segundo a equação (12.4). O que é igual a $(y - y_0)/v_2$ e $(z - z_0)/v_3$. Então estes quocientes são equivalentes, e t sumiu:

$$\textbf{\textit{Reta sem parâmetro}}: \; \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}. \tag{12.5}$$

Um exemplo é $x = y/2 = z/3$. Neste caso, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ – a reta passa pela origem. Outro ponto na reta é $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Como t sumiu, nós não podemos dizer quando atingimos este ponto e quão rápido estamos. As equações $x/4 = y/8 = z/12$ nos dão a mesma reta. Sem t não conhecemos a velocidade $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$.

EXEMPLO 3. Encontre uma equação para a reta que passa pelos pontos $P = (0, 2, 1)$ e $Q = (1, 3, 3)$.

Solução: Nós temos escolhas! $\mathbf{R}_0$ pode ser *qualquer ponto* na reta. A velocidade $\mathbf{v}$ pode ser *qualquer múltiplo* de um vetor com origem em P e extremidade em Q. A decisão sobre $\mathbf{R}_0$ controla onde começamos, e $\mathbf{v}$ controla nossa velocidade.

O vetor com origem em P e extremidade em Q é $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Estes números 1, 1, 2 vêm da subtração de 1, 3, 3 por 0, 2, 1, respectivamente. Escolhemos o vetor $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ como um primeiro $\mathbf{v}$, e o seu dobro como um segundo $\mathbf{v}$. Escolhemos $\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}$ como um primeiro começo e $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Q}$ como um segundo começo. Aqui nós temos duas expressões diferentes para a mesma reta – que são $\mathbf{P}+t\mathbf{v}$ e $\mathbf{Q}+t(2\mathbf{v})$:

$$\mathbf{R}(t) = (2\mathbf{j}+\mathbf{k}) + t(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}), \quad \mathbf{R}^*(t) = (\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}) + t(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}).$$

O vetor $\mathbf{R}(t)$ dá $x = t$, $y = 2+t$, $z = 1+2t$. O vetor $\mathbf{R}^*$ está num ponto diferente na mesma reta no mesmo tempo: $x^* = 1+2t$, $y^* = 3+2t$, $z^* = 3+4t$.

Se considerarmos $t = 1$ em $\mathbf{R}$ e $t = 0$ em $\mathbf{R}^*$, o ponto é $(1,3,3)$. Chegamos lá em momentos diferentes. Percebemos então qual a importância do parâmentro, dizer "onde" e também "quando". Se t vai de $-\infty$ para $+\infty$, todos os pontos numa linha estão também noutra. O caminho é o mesmo, mas as "gêmeas" estão em velocidades diferentes.

QUESTÃO 1. Quando estas gêmeas se encontram? Quando $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^*(t)$?

Resposta: Elas se encontram em $t = -1$, quando $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* = -\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

QUESTÃO 2. Qual é uma equação para o segmento entre P e Q (não além)?

Resposta: Na equação para $\mathbf{R}(t)$, varie t de 0 a 1 (não além):

$$x = t,\ y = 2+t,\ z = 1+2t \quad [0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ para segmento}]. \tag{12.6}$$

No instante $t = 0$ começamos em $P = (0,2,1)$. Em $t = 1$ atingimos $Q = (1,3,3)$.

QUESTÃO 3. Qual é uma equação para a reta sem o parâmetro t?

Resposta: Resolva as equações (12.6) para t ou use (12.5): $x/1 = (y-2)/1 = (z-1)/2$.

QUESTÃO 4. Qual ponto na reta é o mais próximo da origem?

Resposta: A derivada de $x^2+y^2+z^2 = t^2+(2+t)^2+(1+2t)^2$ é $8+12t$. A derivada é zero em $t = -2/3$. Então o ponto mais próximo é $(-2/3, 4/3, -1/3)$.

QUESTÃO 5. Onde a reta encontra o plano $x+y+z = 11$?

Resposta: A equação (12.6) dá $3+4t = x+y+z = 11$. Então $t = 2$. O ponto de encontro é $x = t = 2$, $y = t+2 = 4$, $z = 1+2t = 5$.

QUESTÃO 6. Qual reta passa por $(3,1,1)$ e é perpendicular ao plano $x-y-z = 1$?

Resposta: O vetor normal ao plano é $\mathbf{N} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$. *Isso é* $\mathbf{v}$. O vetor posição a $(3,1,1)$ é $\mathbf{R}_0 = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Então $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + t\mathbf{v}$.

Comparando Retas e Planos

Uma reta tem um parâmetro ou duas equações. Damos o ponto inicial e a velocidade: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$, o que nos diz diretamente que pontos estão na reta. Ou eliminamos t para encontrar duas equações em (12.5).

Um plano tem uma equação e dois parâmetros! A equação é $ax + by + cz = d$. Que nos diz *in*diretamente que pontos estão no plano. (Ao invés de conhecer x, y, z, conhecer a equação que eles satisfazem. Ao invés das direções $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ no plano, nos são ditas as direções perpendiculares $\mathbf{N} = (a, b, c)$.) Com parâmetros, a reta contém $\mathbf{R}_0 + t\mathbf{v}$ e o plano contém $\mathbf{R}_0 + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$. Um plano parece pior com parâmetro (t and s), uma reta parece melhor.

As questões 5 e 6 conectam retas a planos. Aqui estão mais duas: vejam Problemas 41, 44.

QUESTÃO 7. Quando a reta $\mathbf{R}_0 + t\mathbf{v}$ é paralela ao plano? Quando ela é perpendicular?

Resposta: O teste é $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0$. O teste é $\mathbf{v} \times \mathbf{N} = 0$.

EXEMPLO 4. Encontre um plano contendo $P_0 = (1, 2, 1)$ e uma reta de ponto $(1, 0, 0) + t(2, 0, -1)$. O vetor $\mathbf{v}$ estará no plano.

Solução: O vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ vai ao longo da reta. O vetor $\mathbf{w} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vai de $(1, 0, 0)$ para $(1, 2, 1)$. O produto vetorial deles é

$$\mathbf{N} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

O plano $2x - 2y + 4z = 2$ tem seu normal $\mathbf{N}$ e contém o ponto $(1, 2, 1)$.

Velocidade, Direção, Distância, Aceleração

Voltamos para a curva obtida por $\mathbf{R}(t)$. A derivada $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ é o vetor velocidade ao longo desta curva. A ***velocidade escalar*** é a magnitude de $\mathbf{v}$:

$$\text{velocidade escalar} = |\mathbf{v}| = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2}. \qquad (12.7)$$

A ***direção*** do vetor velocidade é $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Este é um vetor unitário, desde que $\mathbf{v}$ é dividido pelo seu comprimento. ***O vetor tangente unitário*** $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ***é denotado por*** T.

O vetor tangente é constante para retas. Ele muda direção para curvas.

EXEMPLO 5. (importante) Encontre $\mathbf{v}$ e $|\mathbf{v}|$ e T para movimento uniforme circular:

$$x = r\cos\omega t,\ y = r\sin\omega t,\ z = 0.$$

Solução: O vetor posição é $\mathbf{R} = r\cos\omega t\mathbf{i} + r\sin\omega t\mathbf{j}$. A velocidade é

$$\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt = -\omega r\sin\omega t\mathbf{i} + \omega r\cos\omega\mathbf{j} \quad \text{(tangente, mas não unitário)}$$

A velocidade é o raio r multiplicado pela velocidade angular ω:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-\omega r \sin \omega t)^2 + (\omega r \cos \omega t)^2} = \omega r.$$

O vetor tangente unitário é $\mathbf{v}$ dividido por $|\mathbf{v}|$:

$$T = -\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j} \qquad \text{(comprimento 1 desde que } \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1).$$

Pense agora sobre a *distância percorrida*. Distância ao longo de uma curva é sempre denotada por s (chamado ***comprimento de arco***). Eu não sei porque usamos s – com certeza não por causa da inicial de speed (velocidade escalar em inglês). De fato, velocidade escalar é distância dividida pelo tempo. O quociente s/t dá a velocidade escalar média; ds/dt é a velocidade escalar instantânea. Estamos de volta ao Capítulo **??** e Secção **??**, à relação de velocidade e distância:

$$\text{velocidade } |\mathbf{v}| = ds/dt, \qquad \text{distância } s = \int (ds/dt)\, \mathrm{d}x = \int |\mathbf{v}(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Note que $|\mathbf{v}|$ e s e t são escalares. O vetor direção é $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \textbf{\textit{vetor tangente unitário}}. \tag{12.8}$$

Na Figura 12.3, o comprimento de corda (reto) é $|\Delta \mathbf{R}|$. O comprimento de arco (curvado) é Δs. Desde que $\Delta \mathbf{R}$ e Δs se aproximam de zero, o raio $|\Delta \mathbf{R}/\Delta s|$ se aproxima de $|\mathbf{T}| = 1$.

Finalmente, pense sobre o ***vetor aceleração*** $\mathbf{a}(t)$. Este é a taxa de variação de velocidade (não a taxa de variação de velocidade escalar):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \tag{12.9}$$

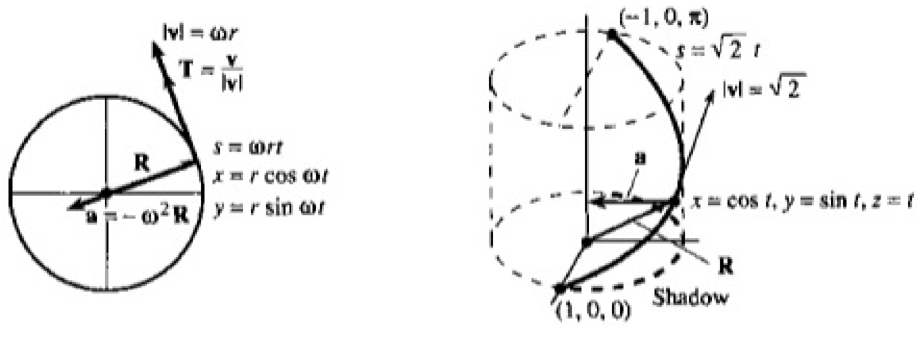

Figura 12.3: Movimento uniforme ao longo dum círculo. Meia volta numa hélice.

Para movimento uniforme ao longo duma reta, como em $x = t,\ y = 2 + t,\ z = 1 + 2t$, não existe aceleração. As segundas derivadas são todas nulas. Para movimento uniforme ao longo dum circulo *existe* aceleração. Dirigindo um carro, você acelera com o acelerador ou o freio. ***Você também acelera virando o volante.*** É o vetor velocidade que muda, não a velocidade escalar.

EXEMPLO 6. Encontre a distância $s(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t)$ para o movimento circular.

Solução: A velocidade escalar no Exemplo 5 é $ds/dt = \omega r$. Depois de integrar, a distância é $s = \omega rt$. Até o instante t nós temos percorrido um ângulo de ωt. O raio é r, então a distância percorrida é igual a ωt multiplicado por r. Note que a dimensão de ω é 1/tempo. (Ângulos são adimensionais.) Até o instante $t = 2\pi/\omega$ nós temos girado uma vez pelo círculo – a $s = 2\pi r$, não de volta a $s = 0$.

A aceleração é $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$. Lembre-se que $\mathbf{R} = r\cos\omega t\mathbf{i} + r\sin\omega t\mathbf{j}$:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 r\cos\omega t\mathbf{i} - \omega^2 r\sin\omega t\mathbf{j}. \tag{12.10}$$

A direção é oposta a $\mathbf{R}$. Este é um movimento especial, sem ação no acelerador ou o freio. Toda a aceleração vem do volante. A magnitude é $|\mathbf{a}| = \omega^2 r$, com a dimensão correta de distância/(tempo)^2.

EXEMPLO 7. Encontre $\mathbf{v}$ e s e $\mathbf{a}$ ao redor da hélice $\mathbf{R} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Solução: A velocidade é $\mathbf{v} = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. A velocidade escalar é

$$ds/dt = |\mathbf{v}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \text{ (constante)}.$$

Então a distância é $s = \sqrt{2}t$. No instante $t = \pi$, uma meia volta está completa. A distância ao longo da sombra é π (meio círculo). A distância ao longo da hélice é $\sqrt{2}\pi$, devido a sua inclinação de 45°.

O vetor tangente unitário é (vetor velocidade)/(velocidade escalar), e a aceleração é $d\mathbf{v}/dt$:

$$\mathbf{T} = (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{a} = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}.$$

EXEMPLO 8. Encontre $\mathbf{v}$ e s e $\mathbf{a}$ ao longo da elipse $x = \cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 0$.

Solução: Tome as derivadas: $\mathbf{v} = -\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$ e $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}$. Isso é a velocidade escalar ds/dt. Para a distância s, algo ruim acontece (ou algo normal). A velocidade escalar não é simplificada por $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Não podemos integrar ds/dt para encontrar uma fórmula para s. A raiz quadrada nos frustra.

A aceleração $-\cos t\mathbf{i} - 2\sin t\mathbf{j}$ ainda aponta para o centro. Isto *não* é a Terra girando ao redor do Sol. O caminho é uma elipse mas a velocidade escalar é errada. Veja Secção **??** (a nota Libra) para um erro horrível na posição do Sol.

12.1. As fórmulas básicas para movimento circular são

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}, \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

Suponha que nós conhecemos a aceleração $\mathbf{a}(t)$ e a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ e a posição $\mathbf{R}_0$. Então $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ são também conhecidos. Integramos cada componente:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}(t) = \text{constante} && \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t && \Rightarrow \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \\
&\mathbf{a}(t) = \cos t\mathbf{k} && \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \sin t\mathbf{k} && \Rightarrow \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t - \cos t\mathbf{k}
\end{aligned}$$

A Curva de um Beisebol

Existe uma bela discussão do fenômeno "curve ball" num livro de cálculo de Edwards and Penney. Resumiremo-no aqui (por opcional). A bola sai da mão do arremessador duma altura de cinco pés: $\mathbf{R}_0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. A velocidade inicial é $\mathbf{v}_0 = 120\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (120 pés/seg é mais que 80 milhas por hora). A aceleração é $-32\mathbf{k}$ da gravidade, mais um novo termo de ***spin***. Se o spin está ao redor do eixo z, e a bola vai ao longo do eixo x, então essa aceleração está na direção y. (Isto vem do produto vetorial $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$ – existe uma diferença de pressão nos lados da bola.) Um bom arremessador pode alcançar $\mathbf{a} = 16\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$. O batedor integra tão rápido quanto ele pode:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = 120\mathbf{i} + (-2 + 16t)\mathbf{j} + (2 - 32t)\mathbf{k} \\
\mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 = 120t\mathbf{i} + (-2t + 8t^2)\mathbf{j} + (5 + 2t - 16t^2)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Note o termo t^2. O efeito do giro é pequeno no começo, depois de repente maior (como todo batedor sabe). O efeito da gravidade também – a bola começa a cair. Em $t = \frac{1}{2}$ a componente $\mathbf{i}$ é 60 pés e a bola alcança o batedor. A componente $\mathbf{j}$ é 1 pé e a componente $\mathbf{k}$ é 2 pés – a curva passa baixo acima do canto exterior.

Em $t = \frac{1}{2}$, quando o batedor viu a bola na metade do caminho, a componente $\mathbf{j}$ era zero. Isto parece como se ela estivesse vindo direto sobre a *home plate*.

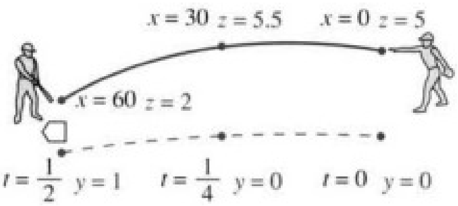

Figura 12.4: Uma *curve ball* está chegando à *home plate*. No meio-caminho ela está na linha.

Exercícios

Read-through questions

O vetor posição __a__ ao longo da curva muda com o parâmetro t. A velocidade é __b__. A aceleração é __c__. Se a posição é $\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, então $\mathbf{v} =$ __d__ e $\mathbf{a} =$ __e__. Neste exemplo, a velocidade escalar é $|\mathbf{v}| =$ __f__. Isto é igual a ds/dt, onde s mede a __g__. Então $s = \int$ __h__. O vetor tangente está na mesma direção que __i__, mas $\mathbf{T}$ é um vetor __j__.

Movimento uniforme retilíneo tem $\mathbf{a} =$ __m__. Se a reta for $x = y = z$, o vetor tangente unitário é $\mathbf{T} =$ __n__. Se a velocidade escalar for $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$, a velocidade é $\mathbf{v} =$ __o__. Se a posição inicial for $(1, 0, 0)$, o vetor posição é $\mathbf{R}(t) =$ __p__. A equação geral da reta é $x = x_0 + tv_1$, $y =$ __q__, $z =$ __r__. Em notação vetorial, isto é $\mathbf{R}(t) =$ __s__. Eliminando t, obtemos as equações $(x-x_0)/v_1 = (y-y_0)/v_2 =$ __t__. Uma reta no espaço precia de __u__ equações, mas um plano precisa de __v__. Uma reta tem um parâmetro onde um plano tem __w__. A reta de $\mathbf{R}_0 = (1, 0, 0)$ para $(2, 2, 2)$ com $|\mathbf{v}| = 3$ é $\mathbf{R}(t) =$ __x__.

Movimento uniforme circular (raio r, velocidade angular ω) tem $x =$ __y__, $y =$ __z__, $z = 0$. A velocidade é $\mathbf{v} =$ __A__. A velocidade escalar é $|\mathbf{v}| =$ __B__. A aceleração é $\mathbf{a} =$ __C__, com magnitude __D__ e direção __E__. Combinando movimento para cima $\mathbf{R} = t\mathbf{k}$ com esse movimento circular, obtemos movimento ao longo de uma __F__. Então $\mathbf{v} =$ __G__ e $|\mathbf{v}| =$ __H__.

1. Esboce a curva com equações paramétricas $x = t$, $y = t^3$. Encontre o vetor velocidade e a velocidade escalar em $t = 1$.

2. Esboce o caminho com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 - t$. Encontre a equação xy do caminho e a velocidade escalar ao longo dele.

3. No círculo $x = \cos t$, $y = \sin t$ justifique com a regra da cadeia e e depois com a geometria porque $dy/dx = -\cot t$.

4. Encontre o ponto mais alto na curva $x = 6t$, $y = 6t - t^2$. A curva é uma ____. Qual é a aceleração $\mathbf{a}$?

5. Encontre o vetor velocidade e a equação xy da reta tangente a $x = e^t$, $y = e^{-t}$ em $t = 0$. Qual é a equação xy da curva?

6. Descreva as formas destas curvas: (a) $x = 2^t$, $y = 4^t$; (b) $x = 4^t$, $y = 8^t$; (c) $x = 4^t$, $y = 4t$.

Nota: *Encontrar as "equações paramétricas" é encontrar $x(t)$, $y(t)$ e possivelmente $z(t)$.*

7. Encontre equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos $P = (1, 2, 4)$ e $Q = (5, 5, 4)$. Provavelmente sua velocidade é 5; mude as equações para a velocidade escalar ser 10. Provavelmente seu $\mathbf{R}_0$ é P; mude o começo para Q.

8. Encontre uma equação para qualquer plano que é perpendicular a reta no Problema 7. Encontre também equções para qualquer reta que é perpendicular a esta mesma reta.

9. Na reta com origem em $(2, 3, 4)$ com velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, o vetor posição é $\mathbf{R}(t) =$ ____. Se o vetor velocidade for mudado para $t\mathbf{i} - t\mathbf{k}$, então $\mathbf{R}(t) =$ ____. O caminho ainda é ____.

10. Encontre equações paramétricas para o movimento uniforme com origem em $P = (3, 1, -2)$ em $t = 0$ na reta para $Q = (0, 0, 0)$ em $t = 3$. Qual é

a velocidade escalar? Mude os parâmetros para que a velocidade escalar seja e^t.

11. As equações $x-1 = \frac{1}{2}(y-2) = \frac{1}{3}(z-2)$ descrevem uma ____. O mesmo caminho é dado parametricamente por $x = 1+t$, $y =$ ____, $z =$ ____. E também por $x = 1+2t$, $y =$ ____, $z =$ ____.

12. Encontre equações paramétricas ao longo do círculo unitário com velocidade escalar e^t com início em $x = 1$, $y = 0$. Onde o círculo está completo?

13. O caminho $x = 2y = 3z = 6t$ é um ____ percorrido com velocidade escalar ____. Se t é restrito a $t \geqslant 1$ o caminho começa em ____. Se t for restringido a $0 \leqslant t \leqslant 1$ o caminho será ____.

14. Encontre o ponto mais perto da origem na reta $x = 1+t$, $y = 2-t$. Onde e quando esta cruza a reta 45° pela origem? Determine a equação da reta que ela nunca cruza.

15. (a) Qual a distância entre as duas retas paralelas $x = y$ e $x = y+1$? (b) Quão longe está o ponto $x = t$, $y = t$ do ponto $x = t$, $y = t+1$? (c) Qual é a menor distância se duas velocidades escalares são diferentes: $x = t$, $y = t$ e $x = 2t$, $y = 2t+1$?

16. Quais vetores seguem o mesmo caminho que $\mathbf{R} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$? A velocidade escalar ao longo do caminho pode ser diferente.

    (a) $2t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$ (b) $2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}$
    (c) $-t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ (d) $t^3\mathbf{i} + t^6\mathbf{j}$

17. Encontre a forma paramétrica para a reta $y = mx + b$.

18. A reta $x = 1 + v_1 t$, $y = 2 + v_2 t$ passa pela origem sob a hipótese de ____v_1 + ____$v_2 = 0$. Esta reta cruza a reta 45° dada por $y = x$ a menos que ____v_1 + ____$v_2 = 0$.

19. Encontre a velocidade $\mathbf{v}$ e a velocidade escalar $|\mathbf{v}|$ e o vetor tangente $\mathbf{T}$ para estes movimentos: (a) $\mathbf{R} = t\mathbf{i} + t^{-1}\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{R} = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j}$ (c) $\mathbf{R} = (t+1)\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j} + (2t+2)\mathbf{k}$.

20. Se a velocidade $dx/dt\mathbf{i} + dy/dt\mathbf{j}$ é sempre perpendicular ao vetor posição $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, mostre pelo produto escalar que $x^2 + y^2$ é constante. O ponto fica no círculo.

21. Encontre dois caminhos $\mathbf{R}(t)$ com a mesma velocidade $\mathbf{v} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$. Encontre um terceiro caminho com um $\mathbf{v}$ diferente, mas com a mesma aceleração.

22. Se a aceleração for um vetor constante, o caminho deve ser ____. Se o caminho for uma reta, o vetor aceleração deve ser ____.

23. Encontre a velocidade escalar máxima e mínima se $x = t + \cos t$, $y = t - \sin t$. Mostre que $|\mathbf{a}|$ é constante mas não $\mathbf{a}$. O ponto se move ao longo de um círculo enquanto o centro se move em qual reta?

24. Encontre $x(t)$, $y(t)$ tal que o ponto se movimento ao longo do círculo $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ com velocidade escalar 1.

25. Uma bola que está circulando com $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$ solta-se e começa a voar numa reta tangente em

$t = \pi/8$. Encontre seu ponto de partida e sua posição num instante t mais tarde (movimento retilíneo; compute sua velocidade constante $\mathbf{v}$).

26. Por que $|\mathbf{a}|$ geralmente é diferente de d^2s/dt^2? Dê um exemplo de diferença, e um exemplo onde os dois números são iguais.

27. Mude t tal que a velocidade escalar ao longo da hélice $\mathbf{R} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ seja 1 ao invés de $\sqrt{2}$. Denote o novo parâmetro s.

28. Encontre a velocidade escalar ds/dt na reta $x = 1+6t,\ y = 2+3t,\ z = 2t$. Integre para encontrar o comprimento s do ponto $(1, 2, 0)$ ao ponto $(13, 8, 4)$. Confira usando $12^2 + 6^2 + 4^2$.

29. Encontre $\mathbf{v}$ e $|\mathbf{v}|$ e $\mathbf{a}$ para a curva $x = \tan t,\ y = \sec t$. Que curva é esta? Em que instante ela vai ao infinito, e ao longo de qual reta?

30. Construa equações paramétricas para o caminho na hélice com velocidade escalar t.

31. Suponha que o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ é a derivada de $\mathbf{R}(t)$. O que se pode dizer a respeito da velocidade escalar? Dê um exemplo não-circular.

32. Para o caminho percorrido $y = f(x)$, sem parâmetro, é impossível encontrar ____ mas ainda possível encontrar ____ em cada ponto do caminho.

Encontre $x(t)$ e $y(t)$ para os caminhos 33-36.

33. Ao longo do quadrado limitado por $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$, com velocidade escalar 2. A fórmula tem quatro partes.

34. Ao longo de um círculo unitário com velocidade escalar e^{-t}. Você consegue todo o caminho?

35. Ao longo de um círculo de raio 4 com aceleração escalar $|\mathbf{a}| = 1$.

36. Acima e abaixo do eixo y com aceleração constante $-\mathbf{j}$, retornando para $(0, 0)$ em $t = 10$.

37. Verdadeiro (com justificativa) ou falso (com exemplo):
    (a) Se $|\mathbf{R}| = 1$ para todo t, então $|\mathbf{v}|$ =constante.
    (b) Se $|\mathbf{a}| = 0$, então $\mathbf{R}$ =constante.
    (c) Se $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ =constante, então $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$.
    (d) Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} = 0$, então $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$ =constante.
    (e) Não existe caminho com $\mathbf{v} = \mathbf{a}$.

38. Encontre o vetor posição para a sombra de $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ no plano xz. A curva sempre é paralela à reta $x = y = z$?

39. Na elipse $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, o ângulo θ do centro não é o mesmo que t devido a ____.

40. Duas partículas estão correndo do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(0, 1)$. Um segue $x = \cos t,\ y = \sin t$, o outro $x = 1 + v_1t,\ y = v_2t$. Escolha v_1 e v_2 tais que a segunda partícula é mais devagar, mas ganha.

41. Duas retas no espaço são dadas por $\mathbf{R}(t) = \mathbf{P} + t\mathbf{v}$ e $\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q} + t\mathbf{w}$. Existem quatro possibilidades: as retas são paralelas, são a mesma, se intersectam ou são disjuntas. Decida qual é qual baseado nos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ (que goes entre as retas):

(a) As retas são paralelas se ____ são paralelos.

(b) As retas são a mesma se ____ são paralelos.

(c) As retas se intersectam se ____ não é paralelo mas ____ estão no mesmo plano.

(d) As retas são disjuntas se o produto triplo $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ é ____.

42. Se as retas são disjuntas (e não estão no mesmo plano), encontre uma fórmula baseada em $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ para a distância entre elas. O vetor $\mathbf{u}$ pode não ser perpendicular ás duas retas, então projete-o em um vetor que o é.

43. A distância de $\mathbf{Q}$ para a reta $\mathbf{P}+t\mathbf{v}$ é a projeção de $\mathbf{u} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ perpendicular a $\mathbf{v}$. Quão distante está $\mathbf{Q} = (9, 4, 5)$ da reta $x = 1 + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 3 + 2t$?

44. Resolva o Problema 43 pelo seguinte cálculo: substitua por x, y, z em $(x - 9)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2$ e minimize. Que (x, y, z) na reta é o mais próximo de $(9, 4, 5)$?

45. Practice com parâmetros, começando de $x = F(t),\ y = G(t)$.

(a) A reflexão pela reta 45° é $x =$ ____, $y =$ ____.

(b) Escreva a curva $x = t^3,\ y = t^2$ na forma $y = f(x)$.

(c) Por que $x = t^2,\ y = t^3$ não pode ser escrito na forma $y = f(x)$?

(d) Se F é invertível, então $t = F^{-1}(x)$ e $y =$ ____(x).

46. De 12:00 a 1:00 um caracol se rasteja uniformemente do ponteiro de minutos (um metro em uma hora). Encontre sua posição no instante t com início em $(0, 0)$.