Cálculo C (2011/2), Lista 3: Soluções

Martin Weilandt

20 de Setembro de 2011

2. (a) Nós sabemos que $\nabla f = \mathbf{F} \quad (*)$. Esta relação implica $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ e portanto $f(x,y) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + g(y)$. Derivando em relação a y, obtemos $g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} - 0 \overset{(*)}{=} 1$, i.e., $g(y) = y + C$. Finalmente concluimos $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + g(y) = \frac{x^2}{2} + y + C$.

$$\int_C^{\tan} \mathbf{F} = f(-1,3) - f(0,1) = \frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{5}{2}$$

   (b) Nós sabemos que $\nabla f = \mathbf{F} \quad (*)$. Esta relação implica $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ e portanto $f(x,y) = \int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{y} + g(y)$. Derivando em relação a y, obtemos $g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{x}{y^2} \overset{(*)}{=} -\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0$, i.e., $g(y) = C$. Finalmente concluimos $f(x,y) = \frac{x}{y} + g(y) = \frac{x}{y} + C$.

$$\int_C^{\tan} \mathbf{F} = f(-1,3) - f(0,1) = \frac{-1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$$

3. Parametrizem algum quadrado cujos lado tem cumprimento 3 (usando uma parametrização dum segmento de reta para cada lado). O resultado sempre vai ser -18. Nós fazemos este cálculo para um exemplo particular em vez de dar a demonstração para o caso geral:

   Consideramos o quadrado C com lados $C_1, \ldots, C_4$ parametrizados por $\mathbf{R}_1(t) = 3t\mathbf{i}$, $\mathbf{R}_2(t) = 3\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$, $\mathbf{R}_3(t) = (3-3t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{R}_4(t) = (3-3t)\mathbf{j}$ (sempre com $t \in [0,1]$). Note que nós seguimos nossa convenção de percorrer a borda C dum conjunto em $\mathbb{R}^2$ no sentido matematicamente positivo (i.e., anti-horário). Com essa parametrização calculamos

$$\int_{C_1} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (y_1(t)x_1'(t) - x_1(t)y_1'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (0\cdot 3 - 3t\cdot 0)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{C_2} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (3t\cdot 0 - 3\cdot 3)\,\mathrm{d}t = -9$$

$$\int_{C_3} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (3\cdot(-3)\cdot 0 - (3-3t)\cdot 0)\,\mathrm{d}t = -9$$

$$\int_{C_4} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ((3-3t)\cdot 0 - 0\cdot(3-3t))\,\mathrm{d}t = 0 \;\Rightarrow$$

$$\int_{C} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0 - 9 - 9 + 0 = -18.$$

4. Usando a parametrização $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{j}$, $t\in[0,2\pi]$, do círculo de raio a (e observando $|\mathbf{R}'(t)| = a$), obtemos $\int_C \rho = \int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t a\,\mathrm{d}t = \pi a^3$.

5. Primeiro note que $\mathbf{R}_1'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{R}_2'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$.

   (a) As duas integrais ao longo de C_1 e C_2 coincidem:

   $$\int_{C_1}^{\tan} \mathbf{F} = \int_0^1 (t\cdot t^2\cdot 1 + t^2\cdot t\cdot 1)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

   $$\int_{C_2}^{\tan} \mathbf{F} = \int_0^1 (t\cdot t^4\cdot 1 + t^2\cdot t^2\cdot 2t)\,\mathrm{d}t = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

   Este campo $\mathbf{F}$ é conservativo: Para ver isso nós podemos ou usar o critério $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e notar que $\mathbf{F}$ é definido em $\mathbb{R}^2$ (que é simplesmente conexo) ou dar um potencial (neste caso $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$).

   (b) As duas integrais ao longo de C_1 e C_2 não coincidem:

   $$\int_{C_1}^{\tan} \mathbf{F} = \int_0^1 (t^2\cdot t\cdot 1 + t\cdot t^2\cdot 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

   $$\int_{C_2}^{\tan} \mathbf{F} = \int_0^1 (t^2\cdot t^2\cdot 1 + t\cdot t^4\cdot 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{17}{35}$$

   Portanto este campo $\mathbf{F}$ não é conservativo (o que também podemos mostrar calculando $\frac{\partial Q}{\partial x}$ e $\frac{\partial P}{\partial y}$.)

6. Um potencial de $\mathbf{F}$ é dado por $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|}$ (veja aula ou verifique $\nabla f = \mathbf{F}$). Se C denota uma curva de P_1 para P_2, obtemos (usando o Teorema

Fundamental de Integrais Curvilíneas) que o trabalho ao longo de C (pelo campo de força $\mathbf{F}$) é

$$W = \int_C^{\tan} \mathbf{F} = f(P_2) - f(P_1) = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}.$$

7. Escrevemos $P(x,y) = xy^2$ e $Q(x,y) = x^2y + 2x$. Usando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned}\int_C (x^2y + 2x)\,\mathrm{d}y + xy^2\,\mathrm{d}x &= \int_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y + P(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dA} \\ &= \iint_D 2xy + 2 - 2xy\,\mathrm{dA} \\ &= 2\iint_D \mathrm{dA} = 2\mathrm{A}(D),\end{aligned}$$

onde A denota a área.

8. (a) $\mathbf{F}$ é conservativo e C uma curva fechada. Portanto $\int_C^{\tan} \mathbf{F} = 0$.

   (b) Calculamos $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ e portanto

$$\begin{aligned}\int_C^{\tan} \mathbf{F} &= \int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}(-\operatorname{sen} t) + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

   (c) Com $P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ (o disco unitário) o Teorema de Green implica

$$\begin{aligned}\iint_C^{\tan} \mathbf{F} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{dA} \\ &= \iint_D y2x(-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2} - x2y(-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2}\,\mathrm{dA} \\ &= \iint_D 0\,\mathrm{dA} = 0\end{aligned}$$

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.