Cálculo C (2011/2): Lista 5 Soluções

Martin Weilandt

17 de Outubro de 2011

1. (a) Nós calculamos $\operatorname{rot}\mathbf{F} = -2\mathbf{a}$ e observamos que $\mathbf{N}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ para a esfera unitária. Portanto,

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\,\mathrm{dS} = -2\iint_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}\rangle\,\mathrm{dS} = -2\iint_S (a_1 x + a_2 y + a_3 z)\,\mathrm{dS}.$$

Agora introduzimos nossa parametrização da esfera dada por

$$\mathbf{R}(\theta,\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}.$$

e nos lembramos que $\left|\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\phi}\right| = |\operatorname{sen}\theta|$. Para obter o hemisfério superior escolhemos $\theta \in [0,\pi/2]$, $\phi \in [0,2\pi]$. Finalmente calculamos (usando a parametrização $\mathbf{R}$ e as relações $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi = 0$ e $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}$):

$$\iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{dS} = -2a_1\iint_S x\,\mathrm{dS} - 2a_2\iint_S y\,\mathrm{dS} - 2a_3\iint_S z\,\mathrm{dS} = 0 + 0 + 2\pi a_3$$

(b) Devia dar o mesmo resultado que (a) segundo o Teorema de Stokes.

2. Calculamos $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 2y\mathbf{i}$ e observamos que no disco S dado por $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 0$ o vetor normal unitário é (dependendo da orientação de C) igual a $\pm\mathbf{N}$ com $\mathbf{N}(x,y,z) = \mathbf{j}$. Aplicamos Stokes para obter

$$\iint_C^{\tan} \mathbf{F} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\,\mathrm{dS} = \iint_S \langle 2y\mathbf{i}, \mathbf{j}\rangle\,\mathrm{dS} = 0.$$

(Na linha acima usamos uma orientação fixa de C, para a orientação oposta de C obtemos $-0 = 0$, i.e. o resultado não depende da orientação.)

3. Só calcular usando o Teorema de Clairaut-Schwarz sobre as segundas derivadas.

4. (a)

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a (2x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a^4 + a^3$$

(b)
$$-2a^2 + 2a^2 + 0 + a^4 + 0 + a^3$$

5.
$$4^3 - 12 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 - 64 = 64 - 192 + 192 - 64 = 0$$

6. É, sim: $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 0$.

7. $C = 100$

8. Nós lembramos da solução geral de $y'' = y$ e adivinhamos $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ (que de fato satisfaz nossa EDO $y'' = 4y$). Usando esta solução geral e as condições iniciais, obtemos $0 = y(0) = C_1 + C_2$ e $1 = y'(0) = 2C_1 - 2C_2$. Resolvendo este sistema, obtemos $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{4}$ e portanto. $y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x)$. (Oficialmente não sabemos que esta solução é única mas no Capítulo 4 vamos ver um teorema que implica a unicidade aqui.)

9.
$$y(x) = \int_1^x (u^2 + u)\,\mathrm{d}u + 3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{13}{6}$$

10. $y(x) = (1 - 2x)^{-1/2}$ com domínio máximo $(-\infty, \frac{1}{2})$

(As soluções de 1, 2 e 4 são baseados nas soluções no livro Calculus de Strang.) Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.