Cálculo C (2011/2): Lista 7 Soluções

Martin Weilandt

23 de Novembro de 2011

1. A equação é linear. Calculamos o fator integrante $r(x) = e^{6x}$ e obtemos
$$\frac{d}{dx}[e^{6x}y] = e^{6x}y' + 6e^{6x}y = e^{7x}.$$
Integrando esta equação, obtemos
$$y = \frac{1}{7}e^{x} + Ce^{-6x}.$$

2. A equação é linear. Calculamos o fator integrante $r(x) = e^{x^3}$ e obtemos
$$\frac{d}{dx}[e^{x^3}y] = e^{x^3}y' + 3x^2e^{x^3}y = \operatorname{sen} x.$$
Integrando esta equação (e usando a condição inicial), obtemos
$$y = e^{-x^3}(2 - \cos x).$$

3. A equação é linear. Calculamos o fator integrante $r(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ e obtemos
$$\frac{d}{dx}[e^{\operatorname{sen} x}y] = e^{\operatorname{sen} x}y' + \cos x e^{\operatorname{sen} x}y = \cos x e^{\operatorname{sen} x}.$$
Integrando esta equação (e usando uma substituição como $u = \operatorname{sen} x$ na integral que aparece à direita), obtemos
$$y = 1 + Ce^{\operatorname{sen} x}.$$

4. Substituimos $v = x^2 + y^2$ e obtemos $v' = 2x + 2yy'$. (Observe que a derivada aqui é em relação a x e y^2 tem de ser derivada usando a regra da cadeia.) A EDO torna-se $v' = 2\sqrt{v}$. Separamos variáiveis e obtemos $v = (x+C)^2$. Colocando $x^2+y^2 = v$, finalmente obtemos $y^2 = 2Cx+C^2$.

5. Substituimos $v = x+y-1$, verificamos $v' = y'$, e a EDO torna-se $v' = v^2$. Separar variáveis dá $v = -(x+C)^{-1}$. Colocando $x+y-1 = v$, finalmente obtemos $y = 1 - x - (x + C)^{-1}$.

6. (um pouco mais complexo que o exemplo parecido na aula) Observamos que a EDO é homogênea e substituimos $v = \frac{y}{x}$. Esta substituição dá $y' = xv' + v$ e a EDO torna-se

$$xv' + v = v^{-1} - v.$$

Separamos variáveis e obtemos

$$\int \frac{vdv}{1 - 2v^2} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

No lado esquerdo usamos a substituição $u := 1 - 2v^2$ e observando que (com $v_0 = y_0/x_0 = 2$) $u_0 = 1 - 2v_0^2 < 0$, obtemos

$$\int \frac{vdv}{1 - 2v^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4} \ln(-u) = -\frac{1}{4} \ln(2v^2 - 1).$$

Juntando este resultado e o lado direito, temos $-\frac{1}{4} \ln(2v^2 - 1) = \ln x + C$. Colocando a condição inicial $x_0 = 1$, $v_0 = 2$, obtemos $C = -\frac{1}{4} \ln 7$ e (como $v_0 > 0$) podemos calcular

$$v = \frac{\sqrt{7 + x^4}}{\sqrt{2}x^2}.$$

Usando $v = \frac{y}{x}$, obtemos

$$y(x) = \frac{\sqrt{7 + x^4}}{\sqrt{2}x}.$$

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.