# Cálculo C (2011/2): Lista 9 Soluções

Martin Weilandt

21 de Novembro de 2011

1. Substituimo $v = y/x$ e obtemos a EDO $xv' + v = e^{-v} + v$. Separando variáveis, obtemos $v = \ln(\ln x + C)$ e finalmente
$$y(x) = x\ln(\ln x + C).$$

2. A equação característica é $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$. Adivinhando a raíz 1 e dividino o polinômio por $(r-1)$, obtemos a equação característica $(r-1)(r^2+1) = 0$, i.e. as raízes são dadas por 1, $i$, $-i$. Portanto, a solução geral é $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3 \operatorname{sen} x$. Usando as condições iniciais, obtemos $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{3}{2}$. Portanto, a solução do nosso PVI é
$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} x.$$

3. A equação característica é $r^2(r^2 - 5r + 6) = 0$ com raízes 0 (de multiplicidade 2), 2 e 3. Portanto, a solução geral é
$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4e^{3x}.$$

4. Sejam $C_1, C_2, C_3$ números tais que $C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x = 0$. Substituindo $x = 0$, concluimos $C_1 = 0$. Dividindo a equação por $x$, obtemos $C_2e^x + C_3xe^x = 0$ para $x > 0$. Tomamos o limite $x \to 0+$ e obtemos $C_2 = 0$. Finalmente, substituimos $x = 1$ e obtemos $C_3 = 0 * e^{-x} = 0$.

   (Alternativamente, devia ser possível mostrar que o Wronskiano não sempre é zero.)

5. Primeiro, achamos que duas soluções linearmente independentes da equação homogênea $y'' + 9y = 0$ são dadas por $y_1 = \cos(3x)$, $y_2 = \operatorname{sen}(3x)$ (pois a equação característica é $r^2 + 9 = 0$ com raízes $\pm 3i$).

   Calculamos o Wronskiano $W(x) = (y_1y_2' - y_1'y_2)(x) = 3$. Escrevendo $f(x) = \cos(3x)$, variação de parâmetros dá
$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx \\ &= -\cos(3x)(-\frac{1}{36}\cos(6x)) + \operatorname{sen}(3x)\frac{1}{3}(\frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{x}{2}) \\ &= \frac{1}{36}\cos(3x) + \frac{x}{6}\operatorname{sen}(3x). \end{aligned}$$

Adicionando a solução complementar $y_c(x) = C_1\cos(3x) + C_2\,\mathrm{sen}(3x)$, concluimos que a solução do nosso PVI é da forma

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) = \frac{1}{36}\cos(3x) + \frac{x}{6}\,\mathrm{sen}(3x) + C_1\cos(3x) + C_2\,\mathrm{sen}(3x).$$

As duas condições iniciais finalmente implicam $C_1 = \frac{71}{36}$, $C_2 = \frac{1}{3}$ e, portanto,

$$y(x) = 2\cos(3x) + \frac{x}{6}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3x).$$

**Alternativa:** Nós poderiamos ter usado o método dos coeficientes indeterminados: Observando que $A\cos(3x) + B\,\mathrm{sen}(3x)$ já é uma solução da EDO homogênea $y'' + 9y = 0$, podemos adivinhar $y_p(x) = Ax\cos(3x) + Bx\,\mathrm{sen}(3x)$ e usar a EDO $\cos(3x) = y_p'' + 9y_p$ para determinar $A$ e $B$ e obter uma solução particular (que vai ser um pouco diferente do $y_p$ acima).

6. Usando que $y'' + 4y = 0$ possui as soluções linearmente independentes $y_1(x) = \cos(2x)$, $y_2(x) = \mathrm{sen}(2x)$, podemos usar variação de parâmetros

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

(com $f(x) = \tan(2x)$, $W(x) = 2$) e obtemos

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\ln(\tan(2x) + \sec(2x)).$$

(Aqui usamos $\int \sec(u)du = \ln(\tan u - \sec u) + C$.)

7. (a) A equação característica é $r^2 - 2r + 1 = 0$ com raíz dupla 1. Portanto duas soluções linearmente independente do problema homogêneo associado $y'' - 2y' + y = 0$ são $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$. Usando a fórmula acima para variação de parâmetros (com $f(x) = e^x$, $W(x) = e^{2x}$, obtemos

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x.$$

(b) Nossas primeiras ideias $Ae^x$, $Axe^x$ já são soluções do problema homogêneo e, portanto, tentamos $y_p(x) = Ax^2e^x$. Substituindo este $y_p$ na EDO original, obtemos

$$e^x = y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = 2Ae^x,$$

i.e. $A = \frac{1}{2}$ e $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^x$.

(c) De fato, as soluções de (a) e (b) são iguais. Mas teoricamente a diferença das duas poderia ser da forma $C_1e^x + C_2xe^x$ (com $C_1$, $C_2$ não necessariamente zero).

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.