Isospektrale Orbifolds

Martin Weilandt
weilandt@math.hu-berlin.de

Betreuerin: Prof. Dr. Dorothee Schüth
(Lehrstuhl für Geometrische Analysis)

Absolventenfeier 2007

Gliederung

Gliederung

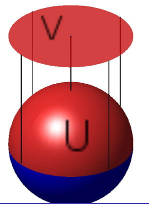
Mannigfaltigkeiten als grundlegende Objekte der Differentialgeometrie

Definition

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (der Dimension n) ist ein metrischer Raum M mit folgender zusätzlicher Struktur: Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Teilmenge $U \subset M$ mit $p \in U$, $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine bijektive (= umkehrbare) Abbildung $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, die in beide Richtungen stetig ist.

Beispiel ($n = 2$)

Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ wie z.B. $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (2-dimensionale Sphäre)



Wozu diese Definition?

Auf Mannigfaltigkeiten haben wir:

- Abstandsfunktion (= Metrik)
- Die zusätzliche Struktur erlaubt zu definieren:
  - Differential (= Ableitung) df einer Abbildung $f : M_1 \to M_2$
  - Integral $\int_U f$ einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ über eine Teilmenge U von M
- Das Volumen einer Mannigfaltigkeit M ist durch ein bestimmtes Integral gegeben.

Definition

Wir schreiben $C^\infty(M, \mathbb{R})$ für die Menge der differenzierbaren Funktionen von M nach $\mathbb{R}$.

Gliederung

Der Laplace-Operator

Definition

Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M. Der Laplace-Operator Δ auf M ist ein spezieller Differentialoperator, d.h. eine lineare Abbildung

$$\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Beispiel

Auf $M = \mathbb{R}^n$ ist Δ gegeben durch

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right),$$

wobei $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ die zweifache partielle Ableitung nach der i-ten Variable bezeichnet.

Eigenschaften von Δ

Definition

Eine Funktion $f \neq 0$ in $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist Eigenfunktion zum Eigenwert s, wenn

$$\Delta f = s \cdot f.$$

Die Eigenfunktionen zu einem festen s bilden den Eigenraum zum Eigenwert s.

Satz

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann:

- *Die Eigenwerte von Δ sind nichtnegativ.*
- *Die Eigenräume von Δ sind endlichdimensional.*

Was macht die Eigenwerte von Δ interessant?

Definition

Zwei Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 heißen isospektral, wenn die Eigenwerte und die entsprechenden Dimensionen der Eigenräume der beiden entsprechenden Laplace-Operatoren Δ_1, Δ_2 übereinstimmen.

Satz

Seien M_1, M_2 zwei isospektrale Mannigfaltigkeiten. Dann stimmen für M_1 und M_2 überein:

- *die Dimension,*
- *das Volumen.*

Frage: Welche weiteren geometrischen Eigenschaften werden durch die Eigenwerte von Δ bestimmt?

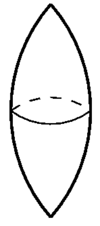
Gliederung

Definition

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei G eine (nicht ganz beliebige) Gruppe von Isometrien (d.h. von abstandserhaltenden Transformationen) auf M. Zwei Punkte $p_1, p_2 \in M$ werden als äquivalent betrachtet, wenn es g aus G gibt mit $g(p_1) = p_2$. Der Raum M/G der Äquivalenzklassen ist eine Orbifold.

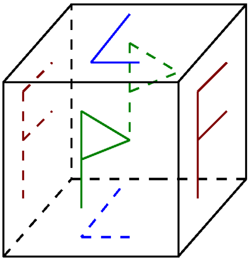
Beispiel

Betrachte $M_1 = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und
$G_1 = \{I_3, R\} \simeq \mathbb{Z}_2$,
wobei $R(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3)$
(R= Drehung um 180° um die x_3-Achse).



Ein zweites Beispiel

Sei $M_2 = \mathbb{R}^3$, $G_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann ist M_2/G_2 ein dreidimensionaler Torus:



(Identifiziere gegenüberliegende Seiten des Würfels der Seitenlänge 1.)

Δ auf Orbifolds

Definition

Die differenzierbaren Funktionen auf einer Orbifold M/G sind gegeben durch

$$C^\infty(M/G) := \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R});\ f \circ g = f \text{ für alle } g \text{ aus } G\}.$$

Δ auf M liefert den Laplace-Operator

$$\Delta : C^\infty(M/G) \to C^\infty(M/G)$$

auf M/G.
Isospektralität von Orbifolds ist definiert wie im Fall von Mannigfaltigkeiten.

Isotropie

Definition

Sei M/G eine Orbifold und $p \in M$. Die Isotropie (oder der Stabilisator) von M/G in p ist gegeben durch

$$Iso(p) := \{g \in G;\ gp = p\} \subset G.$$

In unseren Beispielen:

- S^2/G_1: $Iso(0,0,1) = Iso(0,0,-1) = G_1$.
  Für alle restlichen $p \in S^2$ ist $Iso(p) = \{I_3\}$ trivial.
- $\mathbb{R}^3/G_2$: $Iso(p) = \{I_3\}$ trivial für alle $p \in \mathbb{R}^3$
  ($\Rightarrow \mathbb{R}^3/G_2$ Mannigfaltigkeit)

Frage: Bestimmen die Eigenwerte von Δ die Isotropiegruppen auf einer Orbifold?

Gliederung

Zwei isospektrale Orbifolds mit verschiedenen (nicht isomorphen) Isotropien

Wir betrachten $M = \mathbb{R}^3$ und $\Lambda = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ und bezeichnen mit L_λ die Verschiebung um den Vektor λ (d.h. $L_\lambda(x) = x + \lambda$).
Wir setzen dann zunächst

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (= 90°-Drehung um } x_3\text{-Achse)}$$

$$G_1 := \{\tau^i \circ L_\lambda;\ i = 0, 1, 2, 3,\ \lambda \in \Lambda\}$$

Dies definiert die Orbifold $\mathbb{R}^3/G_1$.

Zwei isospektrale Orbifolds mit verschiedenen (nicht isomorphen) Isotropien

Wir setzen außerdem

$$\rho_0(x_1,x_2,x_3) := (x_1,x_2,x_3),\ \rho_1(x_1,x_2,x_3) := (x_1,-x_2,-x_3),$$
$$\rho_2(x_1,x_2,x_3) := (-x_1,x_2,-x_3),\ \rho_3(x_1,x_2,x_3) := (-x_1,-x_2,x_3),$$

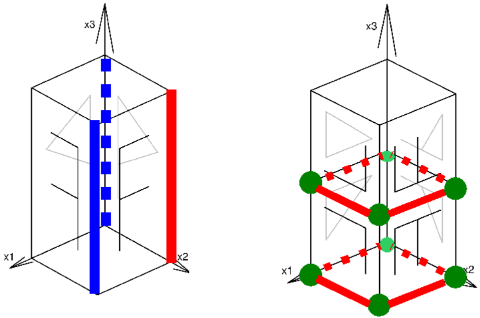
$$G_2 := \{\rho_i \circ L_\lambda;\ i = 0,1,2,3,\ \lambda \in \Lambda\}$$

Dies definiert die Orbifold $\mathbb{R}^3/G_2$.

Satz

Die beiden Orbifolds $\mathbb{R}^3/G_1$ und $\mathbb{R}^3/G_2$ sind isospektral.

Die beiden Orbifolds $\mathbb{R}^3/G_1$ und $\mathbb{R}^3/G_2$ im Vergleich



(Identifiziere obere mit unterer Seite sowie Paare von Seiten mit gleichen Symbolen.)

Beobachtung: Isotropie $\mathbb{Z}_2$ tritt in beiden Orbifolds auf; $\mathbb{Z}_4$ nur in $\mathbb{R}^3/G_1$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nur in $\mathbb{R}^3/G_2$.

Zusammenfassung

- Die Eigenwerte von Δ bestimmen nicht die möglichen Isotropiegruppen.
- Offene Frage: Kann eine Mannigfaltigkeit isospektral zu einer Orbifold mit Punkten nichttrivialer Isotropie sein?

Weiterführende Quellen I

D. Schüth.
Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten.
Vorlesung Wintersemester 2007/08.

M. Weilandt.
Isospectral Orbifolds with different Isotropy Orders.
Diplomarbeit, 2007.