201. Seja a função de IR em IR definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2 são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

$$x > \frac{7}{4}.$$

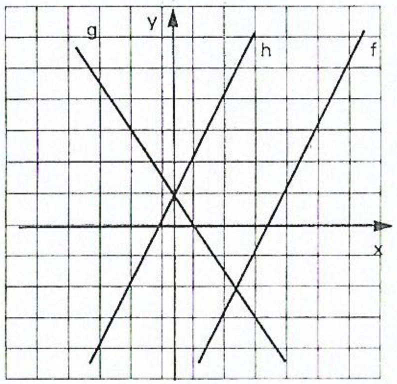
202. Para que valores do domínio da função de IR em IR definida por $f(x) = \frac{3x-1}{2}$ a imagem é menor que 4?

203. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

204. Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x-1}{2}$ definidas em IR. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $f(x) \geqslant g(x)$? b) $g(x) < h(x)$? c) $f(x) \geqslant h(x)$?

205. Dados os gráficos das funções f, g e h definidas em IR, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:



a) $f(x) > g(x)$
b) $g(x) \leqslant h(x)$
c) $f(x) \geqslant h(x)$
d) $g(x) > 4$
e) $f(x) \leqslant 0$

XIII. Inequações

94. *Definição*

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$. Chamamos *inequação* na incógnita x a qualquer uma das sentenças abertas, abaixo:

$$f(x) > g(x)$$
$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) \geqslant g(x)$$
$$f(x) \leqslant g(x)$$

Exemplos

1º) $2x - 4 > x$ é uma inequação em que $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = x$.

2º) $3x - 5 < 2$ é uma inequação em que $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2$.

3º) $x^2 - 3 \geqslant \frac{1}{x}$ é uma inequação em que $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

4º) $\sqrt{x-2} \leqslant \frac{1}{x-3}$ é uma inequação em que $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

95. *Domínio de validade*

Chamamos de domínio de validade da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, em que D_1 é o domínio da função f e D_2 é o domínio da função g. É evidente que, para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \Leftrightarrow (x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \Leftrightarrow (f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } g(x_0) \in \mathbb{R}).$$

Nos exemplos anteriores, temos:

1º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

3º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$

4º) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$

96. *Solução*

O número real x_0 é *solução* da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

Exemplo

O número real 3 é solução da inequação $2x + 1 > x + 3$, pois

$$\underbrace{2 \cdot 3 + 1}_{f(3)} > \underbrace{3 + 3}_{g(3)}$$

é uma sentença verdadeira.

97. *Conjunto solução*

Ao conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira chamamos de *conjunto solução* da inequação.

Exemplo

A inequação $2x + 1 > x + 3$ tem o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira.

Se não existir o número real x tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \varnothing$.

Exemplo

O conjunto solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \varnothing$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio de validade da inequação). Assim sendo, temos

$$x_0 \in S \implies x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto solução é sempre subconjunto do domínio de validade da inequação.

98. *Inequação equivalente*

Duas inequações são *equivalentes em* $D \subset \mathbb{R}$ se o conjunto solução da primeira é igual ao conjunto solução da segunda.

Exemplos

1º) $3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$ *são equivalentes em* $\mathbb{R}$, pois o conjunto solução de ambas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

2º) $x < 1$ e $x^2 < 1$ *não são equivalentes em* $\mathbb{R}$, pois $x_0 = -2$ é solução da primeira mas não o é da segunda.

99. *Princípios de equivalência*

Na resolução de uma inequação procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais "simples", em que o conjunto solução possa ser obtido com maior facilidade. Surge, então, a pergunta: "Que transformações podem ser feitas em uma inequação para se obter uma inequação equivalente?". A resposta a essa pergunta são os dois princípios seguintes:

P-1) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$, as inequações

$$f(x) < g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos

Seja a inequação

$$\underbrace{3x - 1}_{f(x)} > \underbrace{2x + 3}_{g(x)} \qquad (1)$$

adicionemos $h(x) = -2x + 1$ aos dois membros:

$$\underbrace{(3x - 1)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} > \underbrace{(2x + 3)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)}$$

façamos as simplificações possíveis:

$$\underbrace{x}_{f(x) + h(x)} > \underbrace{4}_{g(x) + h(x)} \qquad (2)$$

portanto, como (1) é equivalente a (2), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Na prática, aplicamos a propriedade **P-1** com o seguinte enunciado: *"Em uma inequação podemos transpor um termo de um membro para outro trocando o sinal do termo considerado"*:

$$f(x) + h(x) < g(x) \implies f(x) < g(x) - h(x).$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \implies 3x - 1 - 2x > 3 \implies x > 3 + 1 \implies x > 4.$$

P-2) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$ e tem sinal constante, então:

a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos

1º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira por meio de uma multiplicação por 12.

2º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda foi obtida da primeira por meio de uma multiplicação por -1 e inversão do sentido da desigualdade.

3º) $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$. Notemos que a segunda foi obtida da primeira por meio da multiplicação por $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade **P-2** com o seguinte enunciado: "*Em uma inequação podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente*".

EXERCÍCIOS

206. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $4x + 5 > 2x - 3$
b) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leqslant 2x + 3$
c) $3(x + 1) - 2 \geqslant 5(x - 1) - 3(2x - 1)$

207. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{2} \geqslant x.$$

Solução

A inequação proposta é equivalente à inequação que se obtém multiplicando pelo mmc $(3, 2) = 6$:

$$2(x + 2) - 3(x - 1) \geqslant 6x.$$

Efetuando as operações, temos:

$$-x + 7 \geqslant 6x$$

ou ainda:

$$-7x \geqslant -7.$$

Dividindo ambos os membros por -7 e lembrando que devemos inverter a desigualdade, temos

$$x \leqslant 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}.$$

208. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{x - 1}{2} - \frac{x - 3}{4} \geqslant 1$
b) $\frac{2x - 3}{2} - \frac{5 - 3x}{3} < 3x - \frac{1}{6}$
c) $(3x + 1)(2x + 1) \leqslant (2x - 1)(3x + 2) - (4 - 5x)$
d) $(3x - 2)^2 - (3x - 1)^2 > (x + 2)^2 - (x - 1)^2$
e) $4(x - 2) - (3x + 2) > 5x - 6 - 4(x - 1)$
f) $6(x + 2) - 2(3x + 2) > 2(3x - 1) - 3(2x + 1)$

209. Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após somados, são divididos por 6. Se a média obtida por este critério for maior ou igual a $6{,}5$, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno tenha tirado $6{,}3$ na primeira prova e $4{,}5$ na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

210. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{2x-3}{x-1} \leqslant 2$$

Solução

A inequação proposta é equivalente a $\frac{2x-3}{x-1} - 2 \leqslant 0$,

que, reduzindo ao mesmo denominador, fica $\frac{-1}{x-1} \leqslant 0$.

Notemos que a fração $\frac{-1}{x-1}$ deverá ser não positiva; como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x-1$ deverá ser positivo.

$$x - 1 > 0 \iff x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

211. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{3x-2}{1-x} \leqslant -3$ b) $\frac{4x-5}{2x-1} \geqslant 2$ c) $\frac{-4-3x}{3x+2} < -1$

XIV. Inequações simultâneas

100. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{(I)} \\ \quad e \\ g(x) < h(x) & \text{(II)} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto solução de (I) e S_2 o conjunto solução de (II), o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo

Resolver $\underbrace{3x + 2 < \overbrace{-x + 3}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}} \leqslant x + 4.$

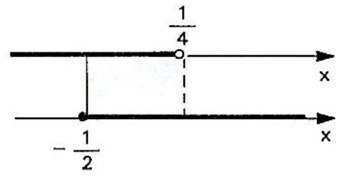
Temos que resolver duas inequações:

(I) $3x + 2 < -x + 3 \implies 4x < 1 \implies x < \frac{1}{4}$

(II) $-x + 3 \leqslant x + 4 \implies -2x \leqslant 1 \implies x \geqslant -\frac{1}{2}$

A interseção desses dois conjuntos é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{4}\right\}.$$



EXERCÍCIOS

212. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$

b) $-4 < 4 - 2x \leqslant 3$

c) $-3 < 3x - 2 < x$

d) $x + 1 \leqslant 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$

e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

213. Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leqslant 1 \\ 3x - 1 \leqslant 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leqslant 2x - 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

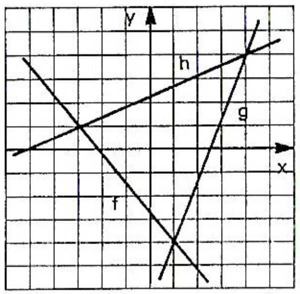
d) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x-3) > 1 - 3(x-5) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{2x-5}{1-x} \leqslant -2 \\ \frac{x^2 + x + 3}{x+1} > x \end{cases}$

214. Com base nos gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) < g(x) \leqslant h(x)$
b) $g(x) \leqslant f(x) < h(x)$
c) $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$



XV. Inequações-produto

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$f(x) \cdot g(x) > 0, \quad f(x) \cdot g(x) < 0, \quad f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \quad e \quad f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$$

são denominadas *inequações-produto*.

101. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Assim, são possíveis dois casos:

1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução do sistema.

2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4).$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$

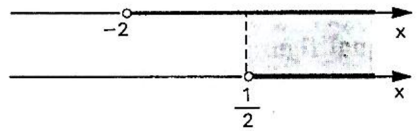
Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(x+2)(2x-1) > 0$.
Analisemos os dois casos possíveis:

1º caso

Cada um dos fatores é positivo, isto é:

$x + 2 > 0 \implies x > -2$
e   e
$2x - 1 > 0 \implies x > \frac{1}{2}$



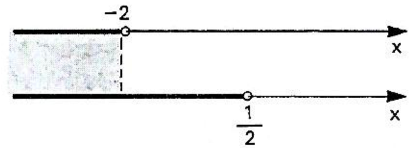
A interseção das duas soluções é:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}.$$

2º caso

Cada um dos fatores é negativo, isto é:

$x + 2 < 0 \implies x < -2$
e   e
$2x - 1 < 0 \implies x < \frac{1}{2}$



A interseção das duas soluções é:

$$S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}.$$

O conjunto solução da inequação $(x+2)(2x-1) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}.$$

102. Quadro de sinais

Vejamos um outro processo, mais prático, para resolvermos a inequação $(x+2) \cdot (2x-1) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Fazemos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$.

		-2		
f(x)	−	0	+	x

		$\frac{1}{2}$		
g(x)	−	0	+	x

Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo dos sinais do produto $f(x) \cdot g(x)$, usaremos o quadro abaixo, que denominamos *quadro-produto*, no qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto.

		-2		$\frac{1}{2}$		x
f(x)	−	0	+	¦	+	
g(x)	−	¦	−	0	+	
f(x) · g(x)	+	0	−	0	+	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}.$$

103. Podemos estender o raciocínio empregado no estudo dos sinais de um produto de dois fatores para um produto com mais de dois fatores.

Exemplo

Resolver a inequação $(3x-2)(x+1)(3-x) < 0$ em $\mathbb{R}$.
Analisando os sinais dos fatores, temos:

		$\frac{2}{3}$		
$f(x) = 3x - 2$	−	0	+	x

		-1		
$g(x) = x + 1$	−	0	+	x

		3		
$h(x) = 3 - x$	+	0	−	x

Vamos, agora, construir o quadro-produto:

		-1		$\frac{2}{3}$		3		x
f(x)	−	¦	−	0	+	¦	+	
g(x)	−	0	+	¦	+	¦	+	
h(x)	+	¦	+	¦	+	0	−	
f(x) · g(x) · h(x)	+	0	−	0	+	0	−	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 3\right\}.$$

104. A inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ tem por conjunto solução S a reunião do conjunto solução S_1 da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ com o conjunto solução S_2 da equação $f(x) \cdot g(x) = 0$, isto é:

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \cdot g(x) = 0 \end{cases}}$$

Exemplo

Resolver a inequação $(3x+1)(2x-5) \geqslant 0$ em $\mathbb{R}$.
A inequação $(3x+1)(2x-5) \geqslant 0$ é equivalente a:

$$\begin{cases} (3x+1) \cdot (2x-5) > 0 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ (3x+1) \cdot (2x-5) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I), temos $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$.

Resolvendo (II), temos $S_2 = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\} \cup \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right\}$$

ou seja:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{5}{2}\right\}.$$

Se recorrêssemos ao quadro-produto, teríamos:

		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		
$f(x) = 3x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	x
$g(x) = 2x - 5$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) \cdot g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{5}{2}\right\}.$$

105. Dentre as inequações-produto, são importantes as inequações: $[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geqslant 0$ e $[f(x)]^n \leqslant 0$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Para resolvermos essas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1º) "Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base", isto é:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{2n+1} > 0 \iff a > 0 \\ a^{2n+1} = 0 \iff a = 0 \\ a^{2n+1} < 0 \iff a < 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}}$$

2º) "Toda potência de base real e expoente par é um número não negativo", isto é:

$$\boxed{a^{2n} \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

Assim sendo, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \iff \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists\, x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall\, x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \leqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos

1º) $(3x - 2)^3 > 0 \implies 3x - 2 > 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

2º) $(4x - 3)^6 > 0 \implies 4x - 3 \neq 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\right\}$

3º) $(2x + 1)^5 < 0 \implies 2x + 1 < 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

4º) $(x - 2)^4 < 0 \implies S = \varnothing$

5º) $(3 - 5x)^7 \geqslant 0 \implies 3 - 5x \geqslant 0 \implies S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{5}\right\}$

6º) $(4x - 5)^2 \geqslant 0 \implies S = \mathbb{R}$

7º) $(8 - 2x)^4 \leqslant 0 \implies 8 - 2x = 0 \implies S = \{4\}$

EXERCÍCIOS

215. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$
b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$
d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
e) $(6x - 1)(2x + 7) \geqslant 0$
f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leqslant 0$
g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$
h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leqslant 0$

216. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(x - 3)^4 > 0$
b) $(3x + 8)^3 < 0$
c) $(4 - 5x)^6 < 0$
d) $(1 - 7x)^5 > 0$
e) $(3x + 5)^2 \geqslant 0$
f) $(5x + 1)^3 \leqslant 0$
g) $(4 + 3x)^4 \leqslant 0$
h) $(3x - 8)^5 \geqslant 0$

217. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então o *sinal* de $(x - 3)^5$ é igual ao *sinal* de $x - 3$, isto é:

		3		
f(x)	−	0	+	x

A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é *positivo* se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é *nulo* se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:

		$-\frac{3}{2}$		
g(x)	+	0	+	x

Fazendo o quadro-produto, temos:

		$-\frac{3}{2}$		3		
f(x)	−		−	0	+	x
g(x)	+	0	+		+	
f(x) · g(x)	−	0	−	0	+	
		$-\frac{3}{2}$		3		

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -\frac{3}{2}\right\}.$$

218. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geqslant 0$

b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$

c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leqslant 0$

d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geqslant 0$

219. Determine, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $(3x - 2)^3 (x - 5)^2 (2 - x)x > 0$.

XVI. Inequações-quociente

106. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

são denominadas *inequações-quociente*.

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2$. Temos:

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2 \implies \frac{3x + 4}{1 - x} - 2 \leqslant 0 \implies \frac{3x + 4 - 2(1 - x)}{1 - x} \leqslant 0 \implies$$

$$\implies \frac{5x + 2}{1 - x} \leqslant 0$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

		$-\frac{2}{5}$		1		
f(x) = 5x + 2	−	0	+		+	x
g(x) = 1 − x	+		+	0	−	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	−	0	+		−	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}.$$

Podemos resolver a inequação $\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2$, multiplicando por $h(x) = 1 - x$ e examinando dois casos:

a) $h(x) = 1 - x > 0$, isto é, $x < 1$

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2 \implies 3x + 4 \leqslant 2(1 - x) \implies x \leqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}.$$

b) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leqslant 2 \implies 3x + 4 \geqslant 2(1 - x) \implies x \geqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{5}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}.$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

220. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{2x + 1}{x + 2} > 0$

b) $\frac{3x - 2}{3 - 2x} < 0$

c) $\frac{3 - 4x}{5x + 1} \geqslant 0$

d) $\frac{-3 - 2x}{3x + 1} \leqslant 0$

221. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{5x - 3}{3x - 4} > -1$

b) $\frac{x - 1}{x + 1} \geqslant 3$

c) $\frac{6x}{x + 3} < 5$

d) $\frac{5x - 2}{3x + 4} < 2$

e) $\frac{3x - 5}{2x - 4} \leqslant 1$

f) $\frac{x + 1}{x - 2} \geqslant 4$

222. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{(1 - 2x)(3 + 4x)}{(4 - x)} > 0$

b) $\frac{(3x + 1)}{(2x + 5)(5x + 3)} < 0$

c) $\frac{(5x + 4)(4x + 1)}{(5 - 4x)} \geqslant 0$

d) $\frac{(1 - 2x)}{(5 - x)(3 - x)} \leqslant 0$

223. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{1}{x - 4} < \frac{2}{x + 3}$

b) $\frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - 2}$

c) $\frac{x + 1}{x + 2} > \frac{x + 3}{x + 4}$

d) $\frac{x + 5}{3x + 2} \leqslant \frac{x - 2}{3x + 5}$

e) $\frac{5x + 2}{4x - 1} > \frac{5x - 1}{4x + 5}$

f) $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} - \frac{3}{x - 3} < 0$

g) $\frac{2}{3x - 1} \geqslant \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

224. Ache os valores reais de x para os quais vale a desigualdade:

$$-\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \geqslant -\frac{1}{x}.$$

e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para} & x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para} & x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para} & -2 < x < 3. \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$; logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para} & x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para} & x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para} & -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

288. Estude os sinais de cada uma das funções do exercício 281.

289. Quais as condições de x para que a expressão $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, seja estritamente positiva?

290. Qual é a condição necessária e suficiente para que o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante em $\mathbb{R}$?

XII. Inequação do 2º grau

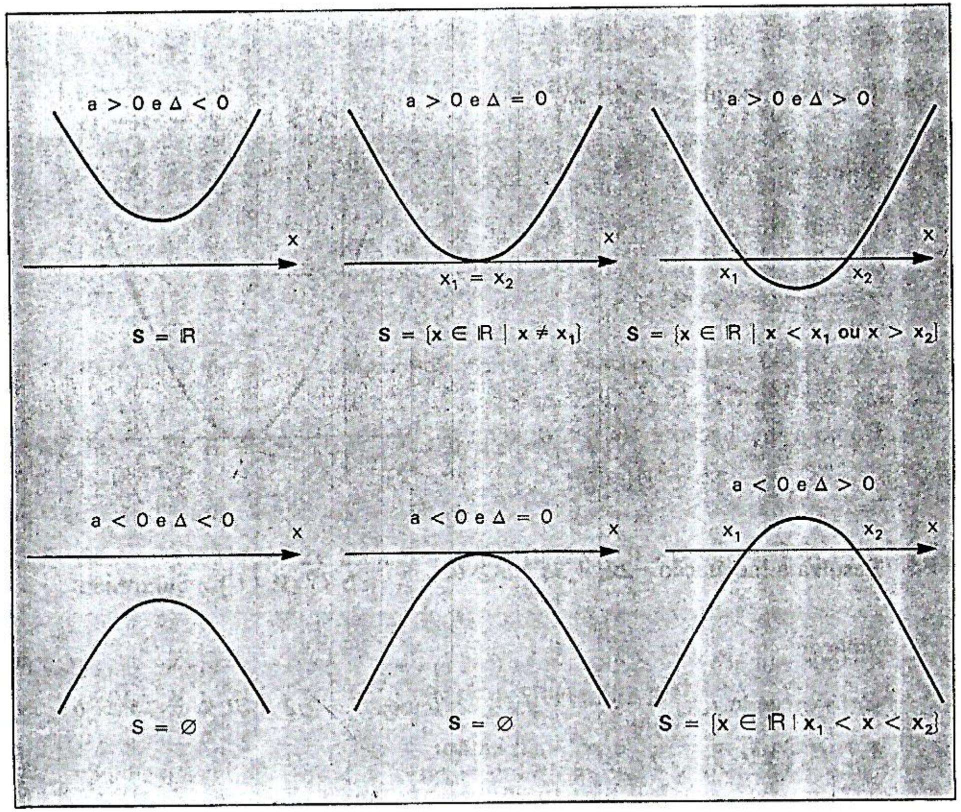
122. Se $a \neq 0$, as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ e $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ são denominadas *inequações do 2º grau*.

Resolver, por exemplo, a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?"

A resposta a essa pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ, podemos ter uma das seis respostas seguintes:



EXERCÍCIOS

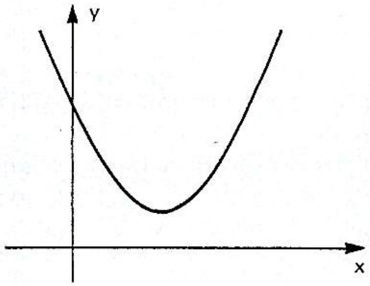
291. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$; então, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

$S = \mathbb{R}$.



292. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

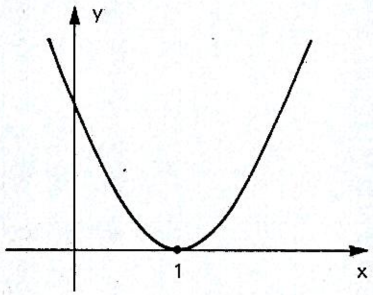
Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo $x = \dfrac{-b}{2a} = 1$; então:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \leqslant 0$, vem:

$S = \{1\}$.



293. Resolva a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$.

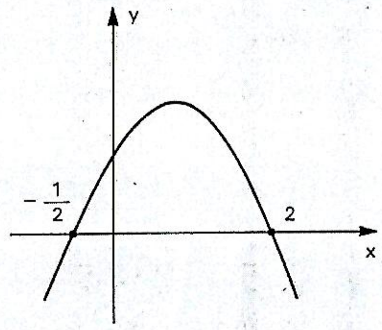
Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os zeros $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 2$; então:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \geqslant 0$, vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$.



294. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
b) $-x^2 + x + 6 > 0$
c) $-3x^2 - 8x + 3 \leqslant 0$
d) $-x^2 + \dfrac{3}{2}x + 10 \geqslant 0$
e) $8x^2 - 14x + 3 \leqslant 0$
f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$
g) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$
h) $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$
i) $x^2 + 3x + 7 > 0$
j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$
k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$
l) $-\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} > 0$

295. Para que valores de x o trinômio $-x^2 + 3x - 4$ é negativo?

296. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, determine $A \cap B$.

297. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leqslant 0\}$, determine $(A \cup B) \cap C$.

298. Sejam $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = x^2 + 5x + 6$. Se a é um número real e $p(a) < 0$, qual é a condição que deve satisfazer $q(a)$?

299. Qual é uma condição suficiente para que a expressão $Y = +\sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função?

300. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:

		-1		2	
$f(x) = x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

		1		3	
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Fazendo o quadro-produto, vem:

		-1		1		2		3	
$f(x) = x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x) \cdot g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.

301. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$
b) $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leqslant 0$
c) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$
d) $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geqslant 0$
e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$

302. É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5)(x^2 - 2x + 2)$.
Determine:

a) os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas;
b) o conjunto dos valores de x para os quais $y \leqslant 0$.

303. Dentre os números inteiros que são soluções da inequação $(x^2 - 21x + 20) \cdot (3 - x) > 0$, qual é o maior?

304. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação $(x^2 - 2x + 8)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16) < 0$.

305. Seja A o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $(x^2 - 5x)(x^2 - 8x + 12) < 0$. Determine A.

306. Resolva a inequação $\dfrac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leqslant 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:

		-1		$\frac{1}{2}$	
$f(x) = 2x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

		0		2	
$g(x) = 2x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Fazendo o quadro-quociente, vem:

		-1		0		$\frac{1}{2}$		2	
$f(x) = 2x^2 + x - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x) = 2x - x^2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

307. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\dfrac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leqslant 0$

c) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

d) $\dfrac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

e) $\dfrac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geqslant 1$

f) $\dfrac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

g) $\dfrac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geqslant -1$

h) $\dfrac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$

308. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das inequações:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x}{x^3-x^2+x-1} \geqslant 0$

c) $\dfrac{x-3}{x-2} \leqslant x-1$

d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$

e) $t + \dfrac{1}{t} \leqslant -2$

f) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{x+1}$

309. Tomando como conjunto universo o conjunto $U = \mathbb{R} - \{1\}$, resolva a inequação $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{x+2}{1-x}$.

310. Dada $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$, resolva a inequação $\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} \leqslant f(-1)$.

311. a) O que se pretende dizer quando se pede para achar o domínio de uma $f(x)$ igualada a uma expressão em x?

b) Determine, em $\mathbb{R}$, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+1}{x^2-2x-15}}$.

312. Ache o domínio da função $y = \sqrt{\dfrac{-x+5}{x^2+x-6}}$, em $\mathbb{R}$.

313. Determine o conjunto igual a $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1} \geqslant 0\right\}$.

314. Qual é a condição para que $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x^2+4x+3}}$, y real, seja definida?

315. Resolva as inequações:

a) $4 < x^2 - 12 \leqslant 4x$

b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leqslant -5x$

c) $0 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 6$

d) $7x + 1 < x^2 + 3x - 4 \leqslant 2x + 2$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4$

316. Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + x - 20 \leqslant 0 \\ x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + 2x \geqslant 0 \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geqslant 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$

317. Considere as desigualdades:

$4y + 3x \leqslant 12, \quad 0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y.$

Classifique as proposições abaixo em verdadeiras ou falsas:

a) O conjunto de soluções das desigualdades é limitado no plano (x, y).
b) O valor máximo da variável x satisfazendo as desigualdades é 4.
c) O conjunto de soluções das desigualdades não é limitado no plano (x, y).
d) O valor mínimo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.
e) O valor máximo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.

318. Assinale as proposições verdadeiras e as proposições falsas nos itens abaixo. O conjunto solução do sistema

$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\} \cup \{0 < x < 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \dfrac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{2} < x < 2\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

319. Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0$, em $\mathbb{R}$.

Solução

Fazendo $z = x^2$, temos

$$z^2 - 5z + 4 \geqslant 0 \implies z \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad z \geqslant 4$$

mas $z = x^2$; portanto:

$(x^2 \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x^2 \geqslant 4) \implies (x^2 - 1 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 \geqslant 0) \implies$

$\implies (-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2)$

logo $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2\}$.

320. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leqslant 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$

c) $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$

d) $2x^4 - 3x^2 + 4 < 0$

e) $x^6 - 7x^3 - 8 \geqslant 0$

f) $3x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

321. Determine m de modo que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m + 1)$ seja positiva para todo x real.

Solução

Devemos ter simultaneamente $\Delta < 0$ e $a > 0$; portanto:

1º) $\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m+1) =$
$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m = -8m + 1 < 0 \implies m > \frac{1}{8}$

2º) $a = m > 0 \implies m > 0$

Como as condições são simultâneas, concluímos que:

$$(f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \iff m > \frac{1}{8}.$$

322. Determine m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 + (2m-1)x + (m^2-2) > 0$

b) $x^2 + (2m+3)x + (m^2+3) \geqslant 0$

c) $x^2 - mx + m > 0$

d) $x^2 + (m+1)x + m > 0$

e) $-x^2 + (m+2)x - (m+3) \geqslant 0$

f) $(m-1)x^2 + 4(m-1)x + m > 0$

g) $mx^2 + (m-2)x + m \leqslant 0$

h) $mx^2 + (m+3)x + m \geqslant 0$

i) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$

j) $(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x + 1 > 0$

323. Determine m para que se tenha $\dfrac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução

Considerando que $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer x real, multiplicamos ambos os membros de $\dfrac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ por $(x^2 + x + 1)$, mantendo a desigualdade.

Então:

$$\frac{x^2 + (m+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2, \forall x \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff x^2 + (m+1)x + 1 < 2(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff -x^2 + (m-1)x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Devemos ter $\Delta < 0$, portanto:

$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = m^2 - 2m - 3 < 0 \iff -1 < m < 3.$

Resposta: $-1 < m < 3$.

324. Determine m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} < 2$

b) $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - x + 2} > m$

c) $\dfrac{x}{x^2 + 4} > \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$

d) $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$

325. Qual é o conjunto de valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$?

326. Qual é a condição para que a desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ seja verificada para todo número real x?

327. Se $\dfrac{x - a}{x^2 + 1} < \dfrac{x + a}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, qual é a condição que a satisfaz?

328. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - mx + m}}$ é o conjunto dos reais.

329. Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, em que x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x, qual deve ser o valor de k?

XIII. Comparação de um número real com as raízes da equação do 2º grau

123. Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leqslant x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é verificar se:

1) α está à esquerda de x_1 ($\alpha < x_1 \leqslant x_2$)

2) α está entre as raízes ($x_1 < \alpha < x_2$)

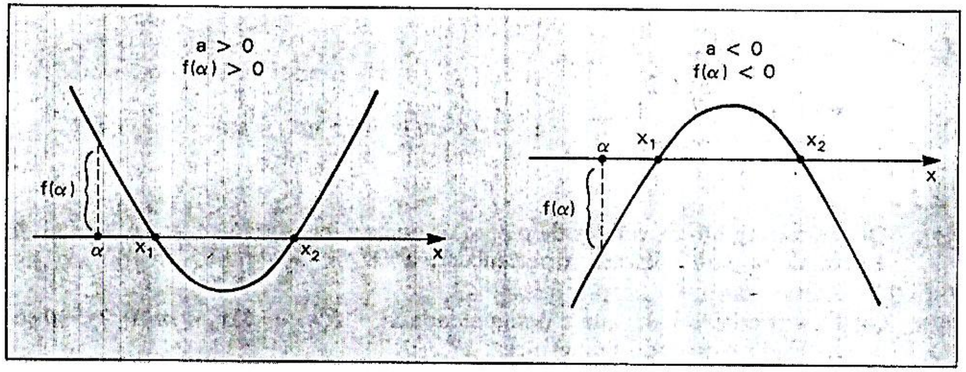
3) α está à direita de x_2 ($x_1 \leqslant x_2 < \alpha$)

4) α é uma das raízes ($\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$)

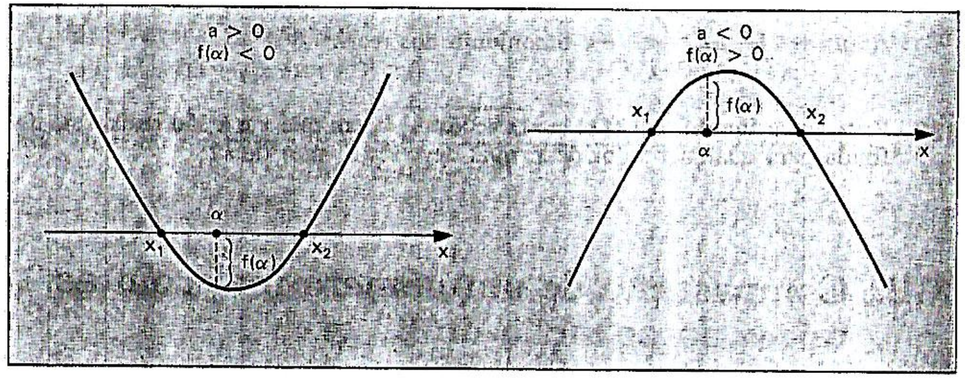
sem calcular as raízes.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já discutimos neste capítulo, temos que:

a) se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2, o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, isto é: a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ têm o mesmo sinal.



b) se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$), o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, isto é: a e $f(\alpha)$ têm sinais contrários.



c) se α é zero de $f(x)$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

Resumo

Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

1) $\alpha < x_1 \leqslant x_2 \implies a \cdot f(\alpha) > 0$
2) $x_1 < \alpha < x_2 \implies a \cdot f(\alpha) < 0$
3) $x_1 \leqslant x_2 < \alpha \implies a \cdot f(\alpha) > 0$
4) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \implies a \cdot f(\alpha) = 0$

Observemos que nos casos 1, 3 e 4 o discriminante é $\Delta \geqslant 0$ enquanto no caso 2 temos $\Delta > 0$.

Inversamente, conhecendo o sinal do produto $a \cdot f(\alpha)$, que conclusão podemos tirar da *existência de raízes reais* da equação $f(x) = 0$ e qual a *posição de α* em relação às mesmas raízes?

É o que veremos em seguida.

124. Teorema 1

Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e α está compreendido entre eles.

H{$a \cdot f(\alpha) < 0$ T{$\Delta > 0$ e $x_1 < \alpha < x_2$

Demonstração

1º) Se fosse $\Delta \leqslant 0$, teríamos: $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, $\forall\ \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que $\Delta > 0$, isto é, $f(x)$ tem dois zeros x_1 e x_2, reais e distintos.

2º) Se o real α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 ou for um zero de $f(x)$, teremos $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, o que contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que α está compreendido entre x_1 e x_2.

Exemplo

Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Temos $a = 3$, $\alpha = 1$ e $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; então:

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1) = -3 < 0.$$

Conclusão: $\Delta > 0$ e $x_1 < 1 < x_2$.

125. Teorema 2

Se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, então α está à esquerda de x_1 ou à direita de x_2.

$$\text{H}\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \text{e} \\ \Delta \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{T}\begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \end{cases}$$

Demonstração

Se $\Delta > 0$ e $x_1 \leqslant \alpha \leqslant x_2$, então $a \cdot f(\alpha) \leqslant 0$, o que contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $\alpha = x_1 = x_2$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, o que também contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Concluímos que $\alpha < x_1 \leqslant x_2$ ou $x_1 \leqslant x_2 < \alpha$.

Observação

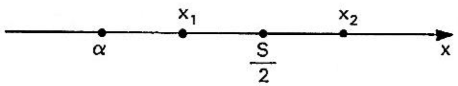
Notemos que, se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, o teorema 2 garante que $\alpha \notin [x_1, x_2]$, mas não indica se α está à esquerda desse intervalo ($\alpha < x_1 \leqslant x_2$) ou à direita dele ($x_1 \leqslant x_2 < \alpha$). Para verificarmos qual dessas duas situações está ocorrendo, devemos comparar α com um número qualquer que esteja entre as raízes. Para facilitar os cálculos vamos utilizar o número $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$, que é a média aritmética das raízes x_1 e x_2, pois:

$$x_1 \leqslant x_2 \implies x_1 \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant x_2 \implies x_1 \leqslant \frac{S}{2} \leqslant x_2.$$

Calculando $\frac{S}{2} = \frac{-b}{2a}$, temos duas possibilidades a examinar:

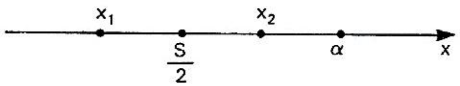
1ª) se $\alpha < \frac{S}{2}$, então α está à esquerda de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à esquerda de x_1:

$$\alpha < \frac{S}{2} \implies \alpha < x_1 \leqslant x_2$$



2ª) se $\alpha > \frac{S}{2}$, então α está à direita de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à direita de x_2:

$$\alpha > \frac{S}{2} \implies x_1 \leqslant x_2 < \alpha$$



Exemplos

1º) Comparar o número *1* às raízes da equação $3x^2 + 4x - 3 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 52 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 + 4 - 3) = 12 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{3} < 1 = \alpha \end{array}\right\} \implies x_1 < x_2 < 1$$

2º) Comparar o número *0* às raízes da equação $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 20 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 4 \cdot f(0) = 4 \cdot 1 = 4 > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} > 0 \end{array}\right\} \implies 0 < x_1 < x_2$$

126. Resumo

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta zeros reais $x_1 \leqslant x_2$ e α é um número real que vai ser comparado a x_1 e x_2, temos:

a) $a \cdot f(\alpha) < 0 \xRightarrow{T-1} x_1 < \alpha < x_2$

b) $a \cdot f(\alpha) = 0 \implies \alpha$ é uma das raízes

c) $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0 \implies \begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \text{ se } \alpha < \frac{S}{2} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \text{ se } \alpha > \frac{S}{2} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

330. Determine m de modo que o número *1* esteja compreendido entre as raízes da equação: $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$.

Solução

Consideremos $f(x) = mx^2 + (m - 1)x - m$.

Para que aconteça $x_1 < 1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$, devemos ter:

$$af(1) < 0 \implies \underbrace{m}_{a} \underbrace{[m \cdot 1^2 + (m - 1) \cdot 1 - m]}_{f(1)} < 0$$

$$\implies m \cdot (m - 1) < 0 \implies 0 < m < 1$$

Resposta: $0 < m < 1$.

331. Determine m de modo que o número α esteja compreendido entre as raízes da equação:

a) $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ e $\alpha = 2$
b) $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$ e $\alpha = -1$
c) $mx^2 + (m - 1)x + (m + 2) = 0$ e $\alpha = 0$
d) $(m^2 - 1)x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0$ e $\alpha = 1$

332. Determine os valores de m na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

333. Determine m para que a equação: $(m - 2)x^2 - 3mx + (m + 2) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.

334. Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais contrários, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

335. Determine m de modo que a equação $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

Solução

Consideremos $f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m$.

Para que aconteça $-1 < x_1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$, devemos ter:

$a \cdot f(-1) > 0, \quad \Delta > 0 \quad$ e $\quad \dfrac{S}{2} > -1.$

Analisando separadamente cada condição:

1ª) $a \cdot f(-1) > 0 \implies \underbrace{m}_{a} \cdot [\underbrace{m(-1)^2 - (2m + 1) \cdot (-1) + 2 + m}_{f(-1)}] > 0 \implies$

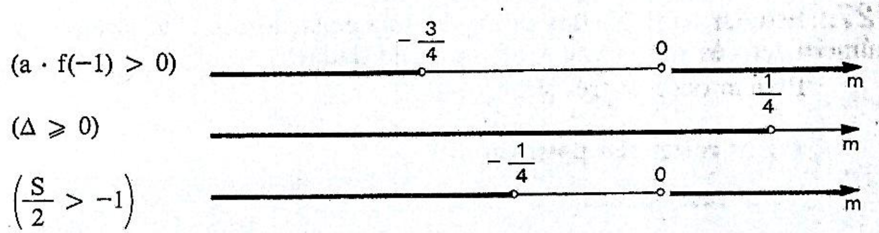
$\implies m \cdot (4m + 3) > 0 \implies m < -\dfrac{3}{4}$ ou $m > 0.$

2ª) $\Delta \geqslant 0 \implies (2m + 1)^2 - 4 \cdot m(2 + m) \geqslant 0 \implies -4m + 1 > 0 \implies m \leqslant \dfrac{1}{4}.$

3ª) $\dfrac{S}{2} > -1 \implies \dfrac{2m + 1}{2m} > -1 \implies \dfrac{2m + 1}{2m} + 1 > 0 \implies \dfrac{4m + 1}{2m} > 0 \implies$

$\implies m < -\dfrac{1}{4}$ ou $m > 0.$

Representando os valores encontrados sobre um eixo:



Como as três condições são simultâneas, fazendo a interseção dos intervalos acima vamos encontrar:

$$m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0 < m \leqslant \frac{1}{4}, \text{ que é a resposta.}$$

336. Determine m de modo que a equação $(m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

337. Determine m de modo que a equação $(m - 1)x^2 - mx - 2m - 2 = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

338. Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 2$.

339. Determine m para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

340. Determine m para que a equação do 2º grau $3x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 1 < x_2 < 4$.

341. Determine m para que a equação do 2º grau $(2m + 1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 4$.

342. Determine m na equação do 2º grau $(3m - 2)x^2 + 2mx + 3m = 0$ para que tenha uma única raiz entre -1 e 0.

343. Determine m na equação do 2º grau $mx^2 - 2(m - 1)x - m - 1 = 0$ para que se tenha uma única raiz entre -1 e 2.

XIV. Sinais das raízes da equação do 2º grau

127. Estudar os sinais das raízes de uma equação do 2º grau é comparar o número zero às raízes x_1 e x_2 da equação dada.

Podem ocorrer três situações:

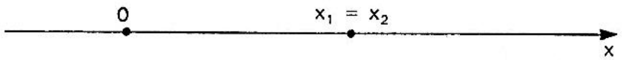
1ª) as raízes são positivas

Neste caso, temos:

$0 < x_1 < x_2$

ou

$0 < x_1 = x_2$



De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > 0.$$

Notemos que, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

a) $a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \implies \frac{c}{a} > 0 \implies P > 0$

em que $P = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes da equação do 2º grau.

b) $\frac{S}{2} > 0 \implies S > 0$

em que $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação do 2º grau.

Assim sendo, uma equação do 2º grau tem raízes positivas somente se:

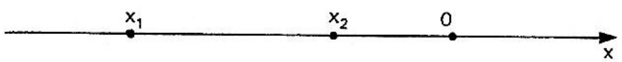
$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S > 0$$

isto é, se as raízes forem reais, com produto positivo e soma positiva.

2ª) as raízes são negativas

Neste caso, temos:

$x_1 < x_2 < 0$



ou

$x_1 = x_2 < 0$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} < 0.$$

Isso também pode ser escrito assim:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S < 0.$$

3ª) as raízes têm sinais contrários

Neste caso, temos:

$$x_1 < 0 < x_2.$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$a \cdot f(0) < 0 \quad \text{ou} \quad P < 0.$$

128. *Aplicação*

Determinar os valores de m na equação do 2º grau

$$(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$$

para que as raízes reais sejam distintas e positivas.

Como a equação é do 2º grau, devemos ter, inicialmente,

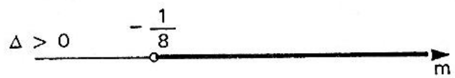
$$m - 1 \neq 0 \implies m \neq 1$$

e, se as raízes são distintas e positivas ($0 < x_1 < x_2$), então:

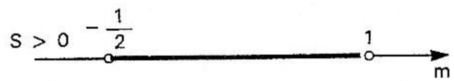
$\Delta > 0$ (pelo fato de as raízes serem reais e distintas) e $S > 0$ e $P > 0$ (pelo fato de as raízes serem positivas).

Analisando cada condição:

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m - 1) \cdot m =$
$= 8m + 1 > 0 \implies m > -\frac{1}{8}$



$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(2m + 1)}{m - 1} > 0 \implies$
$\implies -\frac{1}{2} < m < 1$



$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m - 1} > 0 \implies$
$\implies 0 < m < 1$

Fazendo a interseção das três condições, vem $0 < m < 1$, que é a resposta.

EXERCÍCIOS

344. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m+1)x^2+2(m+1)x+m-1=0$ tenha raízes negativas.

345. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m+1)x^2+2x+m-1=0$ tenha raízes positivas.

346. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m-2)x^2+(3m-1)x+(m+1)=0$ tenha raízes de sinais contrários.

347. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m-1)x^2+(2m+3)x+m=0$ admita raízes negativas.

348. Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m^2-4)x^2+mx+m-3=0$ admita raízes de sinais contrários.

349. Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2-(2m-1)x+(m-2)=0$ admita raízes positivas.

350. Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2+kx+k-5=0$ tenha duas raízes de sinais contrários, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

351. Considere o conjunto $A = \{y \in Z \text{ tal que } |y| < 4\}$. Responda:

a) Qual o número de equações do tipo $x^2+2mx+n=0$, com $m \in A$ e $n \in A$?

b) Dentre as equações obtidas no item a, quantas têm raízes reais e distintas?

c) Dentre as equações com raízes reais e distintas, quantas têm raízes positivas?

352. A equação $(m^2+1)x-2m+5=0$ admite raiz negativa para qual condição sobre m?

353. Sejam p e q reais; se a equação do segundo grau em x:

$$x^2+p^2x+q^2+1=0$$

tem duas raízes reais, x_1 e x_2, qual é o sinal dessas raízes?

LEITURA

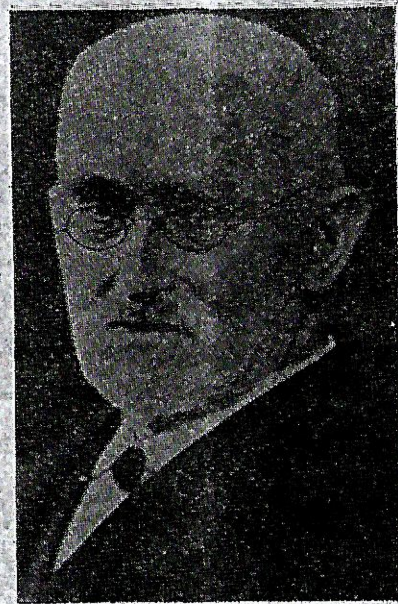
Dedekind e os Números Reais

Hygino H. Domingues

A escola pitagórica provou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Mas nem por isso descobriu os números irracionais. E como os gregos de então, ao contrário de babilônios e egípcios, não eram de se contentar com aproximações, desprovidas de significado teórico, enveredaram pela geometria para superar esse impasse (ver pág. 62). Assim, os gregos do período clássico, ao resolverem a equação $x^2 = 2$, por exemplo, faziam-no geometricamente, fornecendo a raiz positiva como um segmento de reta. E se hoje dizemos "x ao quadrado" para indicar x^2, isso se deve a que os gregos associavam um produto de fatores iguais à figura de um quadrado. Coisa análoga vale para x^3.

Mas a ciência aplicada não pode prescindir da matemática numérica. De modo que já no período alexandrino, quando a matemática grega se abriu para as aplicações, não lhe restou senão imitar a atitude de egípcios e babilônios com relação aos números irracionais — pois ainda demoraria muito até que a natureza destes fosse decifrada.

Assim é que até a primeira metade do século XIX o conceito de número irracional não havia ainda sido elucidado e o conjunto dos números reais carecia de fundamentação lógica. A substituição da intuição geométrica pelos números, como base da análise matemática, foi a grande motivação, no século XIX, para as tentativas de pôr em pratos limpos a questão dos números reais. E entre os matemáticos com papel decisivo nessa empreitada figura Richard Dedekind (1831-1916).


Richard Dedekind (1831-1916).

Dedekind nasceu na Alemanha, em Brunswick, também cidade natal de Gauss. Mas, ao contrário deste, seu extraordinário gênio matemático não aflorou precocemente. Na Universidade de Göttingen,

EXERCÍCIOS

381. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x + 2| = 3$

b) $|3x - 1| = 2$

c) $|4x - 5| = 0$

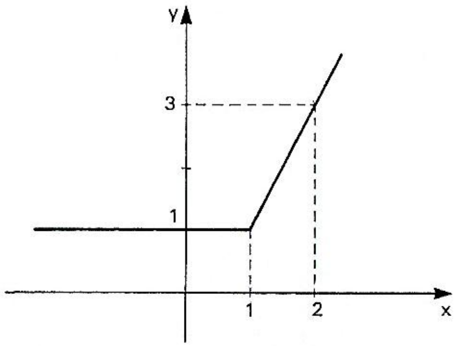
d) $|2x - 3| = -1$

e) $|x^2 - 3x - 1| = 3$

f) $|x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}| = \frac{5}{4}$

g) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

382. Considere o gráfico abaixo:



a) Mostre que este gráfico representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + |x - 1|$.

b) Dada a função constante $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = k$, para que valores de k a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução?

383. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = |x - 1|$

b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$

384. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x - 2| = 2x + 1$

b) $|3x + 2| = 2x - 3$

c) $|2x - 5| = x - 1$

d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

e) $|3x - 2| = 3x - 2$

f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

385. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$.

Sugestão: Faça $|x| = y$.

386. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|2x - 3| + |x + 2| = 4$.

Solução

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geqslant \frac{3}{2} \\ -2x + 3, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geqslant -2 \\ -x - 2, & x < -2 \end{cases}$$

	$x < -2$	$-2 \leqslant x < \frac{3}{2}$	$x \geqslant \frac{3}{2}$
$\|2x - 3\|$	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|2x - 3\| + \|x + 2\|$	$-3x + 1$	$-x + 5$	$3x - 1$

Temos, então:

$$|2x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} -3x + 1, & x < -2 \\ -x + 5, & -2 \leqslant x < \frac{3}{2} \\ 3x - 1, & x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo cada parte, vem:

$-3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1$ (rejeitado, porque x deve ser menor que -2)

$-x + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$

$3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Resposta: $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

387. Qual é o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação:

a) $|x + 1| - |x| = 2x + 1$

b) $\frac{|x|}{x} = \frac{|x - 1|}{x - 1}$

V. Inequações modulares

134. Lembrando das propriedades de módulo dos números reais, para $k > 0$:

1) $|x| < k \iff -k < x < k$
2) $|x| > k \iff x < -k$ ou $x > k$

e, utilizando essas propriedades, podemos resolver algumas inequações modulares.

1º) Resolver em $\mathbb{R}$: $|2x + 1| < 3$.
Então:

$$|2x + 1| < 3 \implies -3 < 2x + 1 < 3 \implies -2 < x < 1$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$.

2º) Resolver em $\mathbb{R}$: $|4x - 3| > 5$.
Então:

$$|4x - 3| > 5 \implies (4x - 3 < -5 \text{ ou } 4x - 3 > 5) \implies$$
$$\implies \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right)$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}.$$

EXERCÍCIOS

388. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações abaixo.

a) $|3x - 2| < 4$
b) $|2x - 3| \leqslant 1$
c) $|4 - 3x| \leqslant 5$
d) $|3x + 4| \leqslant 0$
e) $|2x + 4| < -3$
f) $|2x - 1| > 3$
g) $|5x + 4| \geqslant 4$
h) $|2 - 3x| \geqslant 1$
i) $|3x - 5| > 0$
j) $|4x - 7| \geqslant -1$
k) $1 < |x - 1| \leqslant 3$

389. Resolva as inequações seguintes, em $\mathbb{R}$.

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$
b) $|x^2 - x - 4| > 2$
c) $|x^2 - 5x| \geqslant 6$
d) $|x^2 - 3x - 4| \leqslant 6$
e) $\left|\dfrac{2x - 3}{3x - 1}\right| > 2$
f) $\left|\dfrac{x + 1}{2x - 1}\right| \leqslant 2$
g) $||x| - 2| > 1$
h) $||2x + 1| - 3| \geqslant 2$
i) $||2x - 1| - 4| \leqslant 3$

390. Seja a inequação $\left|2 - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 5$. Quantas de suas soluções são números inteiros positivos e menores que 30?

391. Julgue os itens abaixo.

a) A equação $|2x - 1| = 3$ possui duas raízes reais.
b) Os valores reais de x para os quais $(3x - 2)(1 - x)(1 + x^2) \geqslant 0$ são $\left\{x \in \text{reais} \,\middle|\, \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.
c) Os valores reais de x tais que $\dfrac{x + 2}{3} - \dfrac{x - 1}{2} \geqslant x$ são $\{x \in \text{reais} \mid x \leqslant 1\}$.
d) Não existe número real x que satisfaça a inequação $|\cos x| \geqslant 1$.
e) O polinômio $5x^6 - 6x^5 + x$ é divisível por $(x - 1)^2$.

392. Qual é o comprimento do intervalo que representa a interseção dos conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$?

393. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $1 < |x - 3| < 4$.

394. Para que valores de x, reais, a função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é menor do que 1?

395. Se $|x^2 - 4| < N$ para todo x real, tal que $|x - 2| < 1$, qual é o menor valor possível para N?

396. Julgue os itens abaixo.

a) As inequações $(x - 5)^2(x + 10) < 0$ e $x^2(x + 10) < 0$ têm o mesmo conjunto solução.
b) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$, $\forall\, x, y$ números reais.
c) Se $f(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$, $z \neq \pm 1$, então $\dfrac{f(z) - f(-z)}{1 + f(z) \cdot f(-z)} = \dfrac{4z}{1 - z^2}$.
d) O domínio máximo de definição da função $f(x) = (|5 - 2x| - 7)^{1/2}$ é $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

e) A função $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$ está definida para todo número real $x \neq 2$.

f) A imagem da função $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ é só o zero.

397. Quais os números inteiros que satisfazem a sentença $3 \leqslant |2x-3| < 6$?

398. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x - 7 + |x+1| \geqslant 0$.

Solução

Notando que $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

devemos, então, considerar dois casos:

1º) Se $x \geqslant -1$, temos:

$2x - 7 + |x+1| \geqslant 0 \implies 2x - 7 + x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$.

A solução S_1 é:

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

2º) Se $x < -1$, temos:

$2x - 7 + |x+1| \geqslant 0 \implies 2x - 7 - x - 1 \geqslant 0 \implies x \geqslant 8$.

A solução S_2 é:

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\} = \varnothing$.

A solução da inequação proposta é

$$S = S_1 \cup S_2$$

e portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}.$$

399. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x-1| - 3x + 7 \leqslant 0$
b) $|2x+1| + 4 - 3x > 0$
c) $|3x-2| + 2x - 3 \leqslant 0$
d) $|x+1| - x + 2 \geqslant 0$
e) $|3x-4| + 2x + 1 < 0$
f) $|x^2 - 4x| - 3x + 6 \leqslant 0$
g) $|x^2 - 6x + 5| + 1 < x$

400. Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

401. Indique as afirmativas verdadeiras.

a) $\forall\, x \in [-1, 0]$, $|x| = -x$.
b) O complementar do conjunto solução da inequação $|x-1| \geqslant 2$ é o intervalo $]-1, 3[$.
c) A equação $|x-1| = 2x$ tem duas soluções.
d) Todas as raízes da equação $2^{|x^2-3|} = 8$ são números irracionais.
e) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{4}} (x^2-4) < 2$ está contido no conjunto $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

402. Qual é o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, de $|x-3| < x+3$?

403. Resolva a inequação em $\mathbb{R}$ $|2x-6| - |x| \leqslant 4 - x$.

Solução

Notando que:

$|2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & \text{se } x \geqslant 3 \\ -2x+6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$ e $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

construímos a tabela:

	(0)	(3)	(x)
$|2x-6| =$	$-2x+6$	$-2x+6$	$2x-6$
$|x| =$	$-x$	x	x
$|2x-6| - |x| =$	$-x+6$	$-3x+6$	$x-6$

Temos:

$$|2x-6| - |x| = \begin{cases} x-6 & \text{se } x \geqslant 3 \\ -3x+6 & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ -x+6 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Devemos considerar três casos:

1º) Se $x \geqslant 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$x - 6 \leqslant 4 - x \implies 2x \leqslant 10 \implies x \leqslant 5.$$

A solução S_1 é:

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

2º) Se $0 \leqslant x < 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-3x + 6 \leqslant 4 - x \implies -2x \leqslant -2 \implies x \geqslant 1.$$

A solução S_2 é:

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$.

3º) Se $x < 0$, a inequação proposta é equivalente a:

$-x + 6 \leqslant 4 - x \implies 6 \leqslant 4$, que é absurdo. Logo a solução S_3 é:

$$S_3 = \varnothing.$$

A solução da inequação $|2x - 6| - |x| \leqslant 4 - x$ é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\} \cup \varnothing$

e portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$.

404. Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x + 2| - |x - 3| > x$

b) $|3x + 2| - |2x - 1| > x + 1$

c) $|x - 2| - |x + 4| \leqslant 1 - x$

d) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$

e) $|x + 2| + |2x - 2| > x + 8$

f) $3\{|x + 1| - |x - 1|\} \leqslant 2x^2 - 4x$

g) $|x - 2| - |x + 3| > x^2 - 4x + 3$

405. Resolva a desigualdade $|x - 2| + |x - 4| \geqslant 6$.

406. Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \leqslant x + 2$?

LEITURA

Boole e a Álgebra do Pensamento

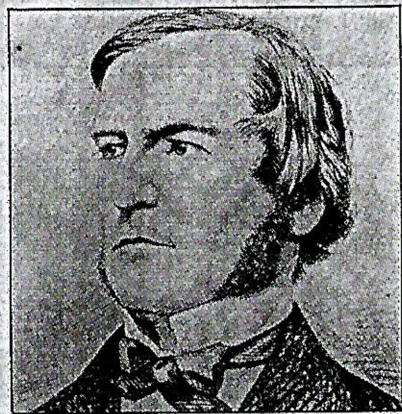
Hygino H. Domingues

A lógica como ciência remonta a Aristóteles (384-322 a.C.), seu criador. No século XVII Descartes (1596-1650) e Leibniz (1646-1716) tencionaram dotá-la de padrões matemáticos, o que pressupõe uma simbologia e um cálculo formal próprios. O alcance dessa lógica seria universal, aplicável a todos os campos do conhecimento. Mas nenhum dos dois deixou sobre o assunto senão alguns escritos fragmentados. Inclusive a contribuição de Leibniz, embora específica, somente em 1901 se tornou conhecida.

Assim é que o marco inicial da lógica simbólica, embora Leibniz seja considerado seu fundador, está fincado no ano de 1847 com a publicação das obras *Mathematical analysis of Logic* de George Boole (1815-1864) e *Formal Logic* de Augustus De Morgan (1806-1871).

De família modesta, Boole nasceu em Lincoln, na Inglaterra. Sua instrução formal não passou dos graus básicos mas, dotado de grande inteligência, e vendo no conhecimento o caminho de seu gosto para ascender socialmente, enveredou pelo autodidatismo. De início aprendeu por si só latim e grego. Depois, como professor de uma escola elementar, resolveu ampliar seus conhecimentos de matemática, pondo-se a estudar, entre outras, as obras clássicas de Laplace e Lagrange. O interesse pela lógica certamente derivou de seu relacionamento com De Morgan, de quem ficara amigo. Sua obra citada, embora não lhe trouxesse grande fama, propiciou-lhe, dois anos depois de publicada, uma nomeação de professor no recém-criado Queens College, em Cork, Irlanda.

Em 1854 Boole lança sua obra-prima, *Investigation of the laws of thought* (*As leis do pensamento* — como usualmente é conhecida), na qual elucida e amplia as idéias de 1847. A finalidade era ainda expressar simbolicamente as leis do pensamento, visando poder usar de maneira mais direta e precisa a dedução lógica.



George Boole (1815-1864).