**Cálculo A**

**Problemas de maximação/minimização**

1. Um retângulo tem perímetro 100 cm. Determine os lados do retângulo de modo que ele tenha a maior área.

2. Mostre que entre todos os retângulos com uma determinada área, aquele com o menor perí metro é um quadrado.

3. Uma caixa tem base na forma de um quadrado e é aberta na parte superior. Se a caixa tem volume de 4000 $\text{cm}^3$, determine as dimensões da caixa que minimiza a quantidade de material usado.

4. Os três lados (não paralelos) de um trapézio tem comprimento $L$. Encontre o comprimento do quarto lado de modo a termos um trapézio de área máxima.

5. Um fazendeiro tem uma propriedade e deseja cercar parte dela em um campo retangular com área de 1.5 milhão $\text{ft}^2$ que será então dividido ao meio por uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de modo a minimizar o custo da cerca?

6. Mostre que entre todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com maior área é um quadrado.

7. Encontre as dimensões do retângulo com maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio $r$.

8. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio $r$.

9. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio $r$. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

10. Um copo com formato de um cone é feito de um pedaço circular de papel de raio $R$ cortando fora um setor e juntando os lados $CA$ e $CB$. Encontre o volume máximo desse copo. [Figura 1]

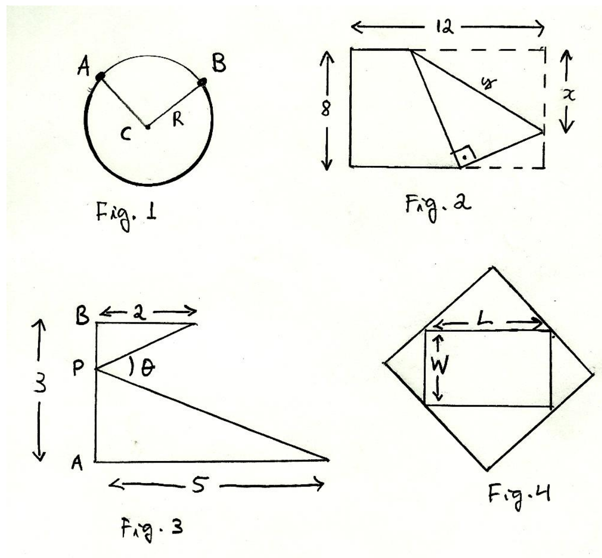
11. Um cone com altura $h$ está inscrito em outro cone maior com altura $H$, de forma que seu vértice está no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{H}{3}$.

12. Mostre que de todos os triãngulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é equilátero.

13. O centro superior direito de um pedaço de papel com 8 cm de largura por 12 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito como mostrado na figura 2. Como se deve dobrar de forma a minimizar o comprimento da dobra? (Isto é, como escolher $x$ de modo a minimizarmos $y$?)

14. Como deve ser escolhido o ponto $P$ sobre o segmento $AB$ de forma a minimizar o ângulo $\theta$? [Figura 3]

15. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento $L$ e largura $W$ [Figura 4].




**Respostas**

1. 25 m, 25 m

2.

3. 20 cm, 20 cm, 10 cm

4. 2 L

5. O fazendeiro deverá considerar um retângulo de lados 1000 ft, 1500 ft, devendo a cerca que divide o retângulo ao meio ser paralela ao lado de 1000 ft.

6.

7. É um quadrado de lado $\sqrt{2}\, r$

8. O triângulo é equilátero de lado $\sqrt{3}\, r$

9. $\frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$

10. $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

11.

12.

13. 6 cm

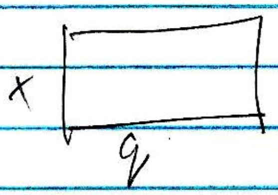
14. O ponto $P$ deve ser tomado a uma distância de $5-2\sqrt{5}$ do ponto $A$

15. $\frac{(L+W)^2}{2}$

# Lista 13 - Cálculo A - Solução

1. Um retângulo tem perímetro 100 cm. Determine os lados do retângulo de modo que ele tenha a maior área.

**Solução**




$$P = 2x + 2y = 100 \quad \therefore \quad y = 50 - x$$

$$S = xy = x(50 - x) = 50x - x^2$$

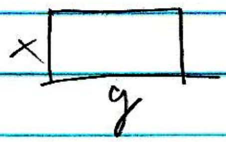
$$\frac{dS}{dx} = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow x = 25 \text{ é pto. máximo}$$

Daí devemos ter os lados do retângulo como sendo, 25 e 25

2. Mostre que um retângulo com uma determinada área tem o valor mínimo de perímetro quando ele é um quadrado.

Solução




$$\begin{cases} A = xy & \text{(área)} \\ p = 2x + 2y & \text{(perímetro)} \end{cases}$$

$$y = \frac{A}{x} \longrightarrow p = 2x + 2\frac{A}{x}$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{2A}{x^2} = 0$$

$$\therefore \frac{2A}{x^2} = 2$$

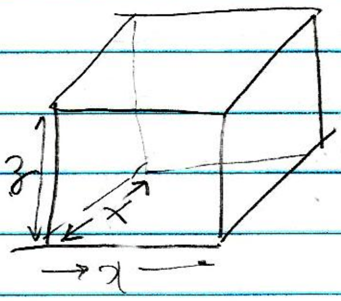
$$\Rightarrow x = \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

Isto é $x = y = \sqrt{A}$ $\Rightarrow$ o retângulo com menor perímetro para um certo valor fixo de área é um quadrado

3. Uma caixa tem base na forma de um quadrado e é aberta na parte superior. Se o volume da caixa é de 4000 cm³, determine as dimensões da caixa que minimiza a quantidade de material usada.

Solução




$$V = x^2 z = 4000 \quad \text{(Volume)}$$

$$S = 4xz + x^2 \quad \text{(Área)}$$

$$V = 4000 = x^2 z \Rightarrow z = \frac{4000}{x^2}$$

$$\therefore$$

$$S = \frac{4x \, 4000}{x^2} + x^2$$

$$S = \frac{16000}{x} + x^2$$

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{16000}{x^2} + 2x = 0$$

$$\therefore$$

$$2x^3 = 16000$$

$$x^3 = 8000 \Rightarrow \underline{\underline{x = 20}}$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{32000}{x^3} + 2 \Big|_{x=20} > 0 \Rightarrow \text{S é mínimo quando } x = 20$$

/ /

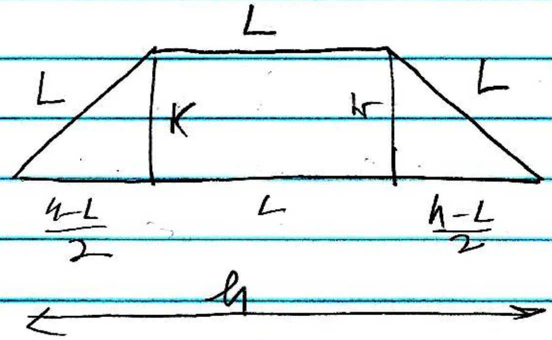
$x=20 \longrightarrow z = \frac{4000}{x^2} = \frac{\cancel{4000}}{\cancel{400}} = 10$

$\therefore$

A dimensão da caixa que minimiza o volume é 20, 20, 10.

4. Três lados de um trapézio têm comprimento $L$, e nenhum deles é paralelo entre si. Encontre o comprimento do quarto lado de modo a termos um trapézio de área máxima

Solução



$$S = k.L + k\,\frac{h-L}{2} = k\,\frac{2L+h-L}{2} = \frac{k(L+h)}{2}$$

$$\left(\frac{h-L}{2}\right)^2 + k^2 = L^2 \Leftrightarrow k^2 = L^2 - \frac{h^2-2hL+L^2}{4}$$

$$= \frac{4L^2-h^2+2hL-L^2}{4}$$

$$K = \sqrt{3L^2+2hL-h^2}\,/\,2$$

$$S = \frac{\sqrt{3L^2 + 2hL - h^2} \cdot (L+h)}{4}$$

$$\frac{dS}{dh} = 0 = \frac{1}{48} \cdot \frac{(2L-2h)(L+h)}{\sqrt{\phantom{x}}} + \frac{1}{4}(3L^2+2hL-h^2)^{1/2}$$

$$0 = (L-h)(L+h) + (3L^2+2hL-h^2)$$

$$0 = L^2 - h^2 + 3L^2 + 2hL - h^2$$

$$0 = 4L^2 - 2h^2 + 2hL$$

$$0 = 2L^2 - h^2 + hL$$

$\therefore$

$$h = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 8L^2}}{2}$$

$$= \frac{L \pm \sqrt{9L^2}}{2}$$

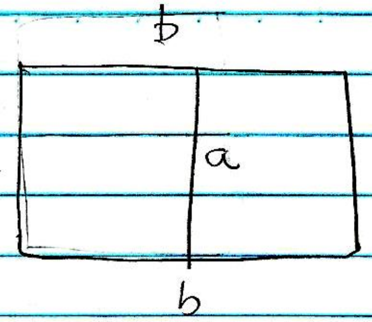
$$= \frac{L \pm 3L}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2L \\ \searrow -L \end{array}$$

$\therefore$

$$\boxed{h = 2L}$$

tilibra

5.




$$\begin{cases} ab = A_0 & \text{(área)} \\ 3a + 2b = p(a,b) & \text{(perímetro)} \end{cases}$$

$$b = \frac{A_0}{a}$$

$$p = 3a + \frac{2A_0}{a}$$

$$p'(a) = 0 = 3 - \frac{2A_0}{a^2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3} A_0}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} \times 1.5 \times 10^6}$$

$$= 10^3$$

$$\| a = 1000 \text{ pés} \|$$

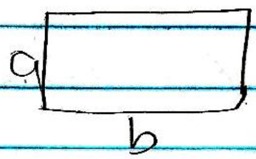
$$ab = A_0 \Rightarrow 1000 \cdot b = 1.5 \times 10^6$$

$$\Rightarrow b = 1.5 \times 10^3$$

$$\| b = 1500 \text{ pés} \|$$

Resposta: $\boxed{1000 \times 1500 \text{ pés}}$

6.




$$p = 2(a+b) = \text{fixo} \Leftrightarrow b = \frac{p-2a}{2}$$

$$A = ab \Rightarrow A = a\,\frac{p-2a}{2}$$

$$A = \frac{ap}{2} - a^2$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{2}p - 2a = 0$$

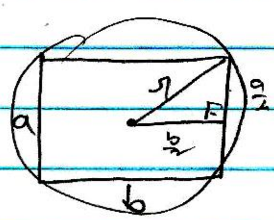
$$\boxed{a = \frac{p}{4}}$$

$$b = \frac{p-2a}{2} = \frac{p - \frac{p}{2}}{2} = \frac{p}{4}$$

$\therefore$

$\Rightarrow$ $\boxed{a = b \;\therefore\; \text{tem-se um quadrado}}$

7.




$$\begin{cases} A = ab \\ r^2 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2) \Leftrightarrow 4r^2 - a^2 = b^2 \end{cases}$$

$$A = a\sqrt{4r^2 - a^2} \qquad b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$\frac{dA}{da} = \sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{1}{2}a\,\frac{-2a}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

7 - cont.

$$\frac{dA}{da} = \sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

$$= \frac{4r^2 - a^2 - a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{4r^2 - 2a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 0 \Rightarrow 4r^2 - 2a^2 = 0$$

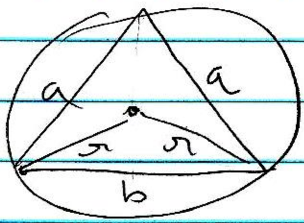
$$\| a = r\sqrt{2} \|$$

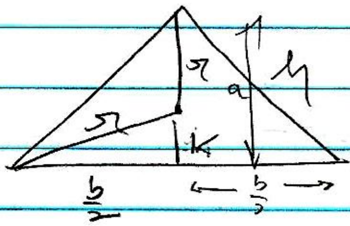
$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - r^2 2} = \sqrt{2r^2}$$

$$\therefore \| b = r\sqrt{2} \|$$

Resp.: O maior retângulo que pode ser inscrito num círculo de raio $r$ é um quadrado de lado $a = r\sqrt{2}$.

8.




$$k = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$h \equiv r + k = r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 + r^2 - \cancel{\frac{b^2}{4}} + 2r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = a^2 - \cancel{\frac{b^2}{4}}$$

$$\| \; 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} = a^2 \; \|$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} - \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)^2}$$

$$\| \; S = \frac{1}{2} b \left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right) \; \|$$

8 - Cont.

$$\frac{ds}{db} = 0 = \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} b \frac{1}{2\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}} \left(-\frac{2b}{4}\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right) - \frac{b^2}{8} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}}$$

$$\frac{b^2}{4\cancel{8}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)$$

$$\frac{b^2}{4} = \left(r + \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}\right)\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\frac{\cancel{2}b}{4} = r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + r^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$\frac{b^2}{2} = r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} + r^2$$

$$\frac{b^2}{2} - r^2 = r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\frac{b^4}{4} - \frac{2b^2r^2}{2} + r^4 = r^2\left(r^2 - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$\frac{b^4}{4} - b^2r^2 + \cancel{r^4} - \cancel{r^4} + \frac{r^2b^2}{4} = 0$$

$$\frac{b^4}{\cancel{4}} - \frac{3r^2b^2}{\cancel{4}} = 0$$

$$b^4 = 3r^2b^2$$

$$b^2 = 3r^2 \Longrightarrow \| b = r\sqrt{3} \|$$

/ /

$$a^2 = 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{4}}$$

$$= 2r^2 + 2r\sqrt{\frac{r^2}{4}}$$

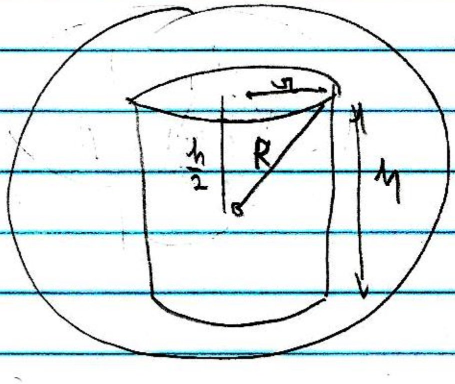
$$= 2r^2 + 2r\,\frac{r}{\cancel{2}}$$

$$= 2r^2 + r^2$$

$$a^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{a = r\sqrt{3}}$$

O triângulo é um triângulo equilátero com lado $r\sqrt{3}$

9.




$$V_{cil} = \pi r^2 \cdot h$$

<u>Relação</u>:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$\therefore V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$$

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3$$

$\Longrightarrow$

tilibra

9- cont.

$$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{3\cancel{\pi}}{4} h^2 = \cancel{\pi} R^2$$

$$\left\| h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \right\|$$

$$\frac{dV^2}{dh^2} = -\frac{6\pi h}{4} \bigg|_{h=\frac{2R}{\sqrt{3}}} < 0 \implies h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ é}$$

pto. máximo para V.

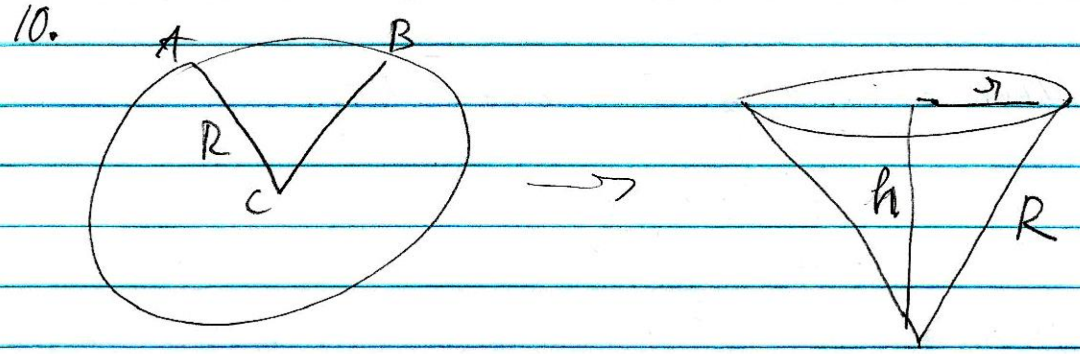
$$V_{max} = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3 \bigg|_{h=\frac{2R}{\sqrt{3}}}$$

$$= \pi R^2 \frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\cancel{4}} \frac{\overset{2}{\cancel{8}} R^3}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $\boxed{V_{max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}}$

10.




$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \\ h = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{2\pi r}{3}\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{-2r}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} r \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$\frac{dV}{dr} = 0 = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}}\cancel{r}\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{3}2}}{\cancel{3}\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$2\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$$

$$2(R^2 - r^2) - r^2 = 0$$

$$2R^2 - 3r^2 = 0$$

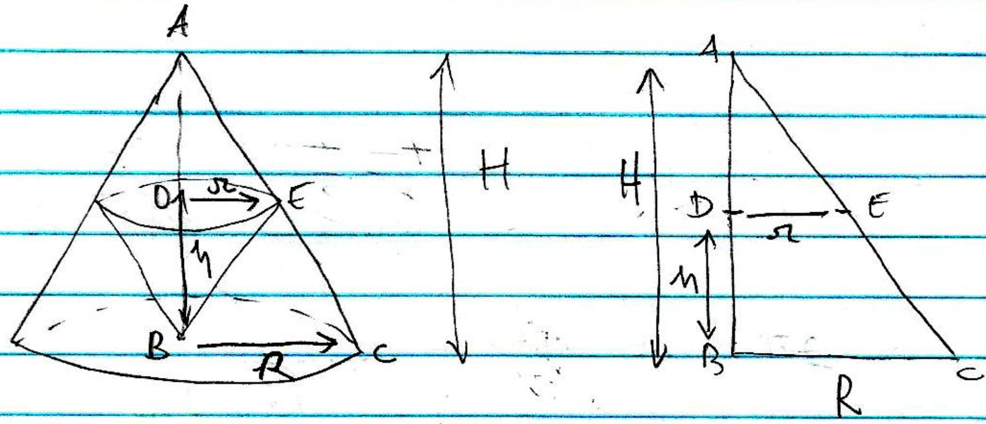
$$\boxed{r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R}$$

$$V_{Max} = \frac{1}{3}\pi \, \frac{2}{3}R^2 \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2}$$

$$= \frac{2\pi R^2}{9}\sqrt{\frac{R^2}{3}}$$

$$\boxed{V_{Max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}}$$

11.




$$V_{int} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R}$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

$\therefore$

$$H - h = \frac{r}{R}H$$

$$= \frac{\pi}{3}H\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)$$

$$\| h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right) \|$$

$$\frac{dV_{int}}{dr} = \frac{\pi}{3}H\left(2r - \frac{3r^2}{R}\right) = 0$$

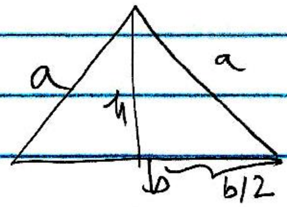
$$2r - \frac{3r^2}{R} = 0 \Rightarrow \left\| r = \frac{2R}{3} \right\|$$

$$\therefore \quad h = H\left(1 - \frac{\frac{2R}{3}}{R}\right) = H\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{H}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{h = \frac{H}{3}}$$

tilibra

12.




$$\begin{cases} p_0 = 2a+b = \text{fixo} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{p_0-b}{2} \\ h = \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}} \end{cases}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2} + \cancel{\frac{b^2}{4}} - \cancel{\frac{b^2}{4}}}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}}$$

$$\frac{dS_\Delta}{db} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}} + \frac{1}{2} b \, \frac{1}{2\sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}}} \, \left(-p_0/2\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}} - \frac{1}{8} \frac{p_0 b}{\sqrt{\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{4} - \frac{p_0 b}{2}\right) - \frac{1}{8} p_0 b$$

$$= \frac{p_0^2}{\cancel{8}} - \frac{2 p_0 b}{\cancel{4}} - \frac{1}{\cancel{8}} p_0 b$$

$$0 = p_0^{\cancel{2}} - 3 \cancel{p_0} b$$

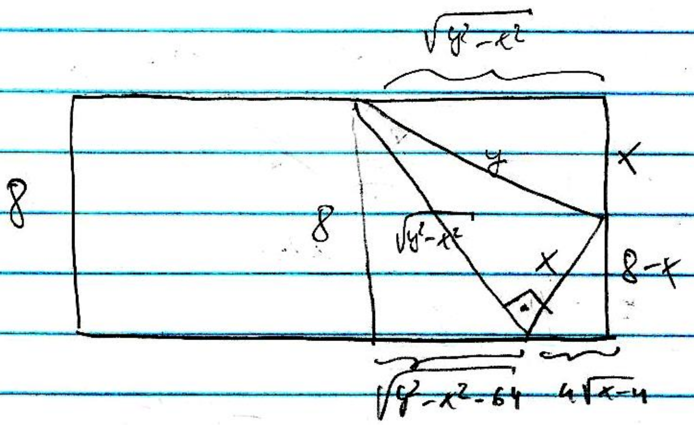
$$0 = p_0 - 3b \Rightarrow \boxed{b = \frac{p_0}{3}}$$

$$a = \frac{p_0 - b}{2} = \frac{p_0 - \frac{p_0}{3}}{2} = \frac{\frac{2p_0}{3}}{\cancel{2}} = \frac{p_0}{3}$$

$$\therefore \quad \| a = \frac{p_0}{3} \|$$

Logo tem-se $a = b \Rightarrow$ o triângulo é equilátero.

13.




Da figura temos:

$$\sqrt{y^2 - x^2 - 64} + 4\sqrt{x-4} = \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cancel{y^2} - \cancel{x^2} - 64 + 8\sqrt{y^2 - x^2 - 64}\,\sqrt{x-4} + 16(x-4) = \cancel{y^2} - \cancel{x^2}$$

$$-64 + 8\sqrt{y^2 - x^2 - 64}\,\sqrt{x-4} + 16x - 64 = 0$$

$(\div -8)$ $$-128 + 16x = -8\sqrt{y^2 - x^2 - 64}\,\sqrt{x-4}$$

$$16 - 2x = \sqrt{y^2 - x^2 - 64}\,\sqrt{x-4}$$

13. cont.

$$256 - 64x + 4x^2 = (y^2 - x^2 - 64)(x-4)$$

$$y^2 = x^2 + 64 + \frac{4x^2 - 64x + 256}{x-4}$$

$$= \frac{x^3 - \cancel{4x^2} + \cancel{64x} - \cancel{256} + \cancel{4x^2} - \cancel{64x} + \cancel{256}}{x-4}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{x-4}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \cdot \left( \frac{3x^2}{x-4} + \frac{x^3(-1)}{(x-4)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \left( \frac{3x^2(x-4) - x^3}{(x-4)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \left( \frac{3x^3 - 12x^2 - x^3}{(x-4)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \frac{\overset{6}{\cancel{2}x^3} - \cancel{12}x^2}{(x-4)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \frac{x^3 - 6x^2}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}} \quad \frac{x^3-6x^2}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x}\;(x-4)^{3/2}} \quad (x^3-6x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-4)^{3/2}} \quad (x^2-6x) \qquad (x \neq 0\ ,\ x \neq 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \implies x^2-6x = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x-6=0 \implies \boxed{x=6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6-\delta} = \frac{1}{\sqrt{6-\delta}\,(2-\delta)^{3/2}} \quad (6-\delta)(\cancel{6}-\delta-\cancel{6}) = \underbrace{\frac{6-\delta}{\sqrt{6-\delta}\,(2-\delta)^{3/2}}}_{>0} \quad (-\delta) \quad \underline{\underline{<0}}$$

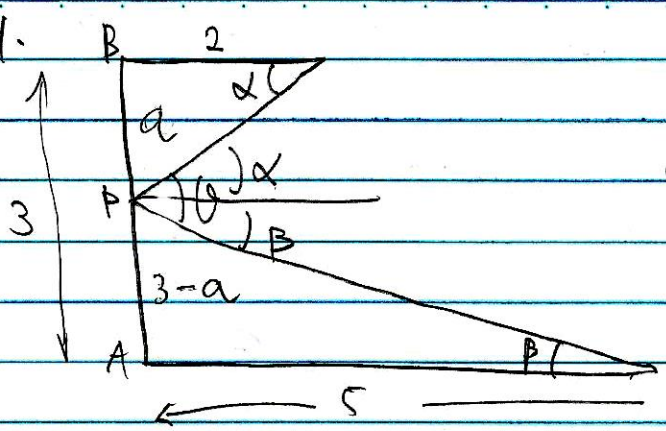
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6+\delta} = \frac{1}{\sqrt{6+\delta}\,(2+\delta)^{3/2}} \quad (6+\delta)(6+\delta-6) = \frac{6+\delta}{\sqrt{6+\delta}\,(2+\delta)^{3/2}} \quad \delta \underline{\underline{>0}}$$

Isto é, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6-\delta} < 0$ e $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=6+\delta} > 0$

$\implies$ $x=6$ é pto. mínimo ok!

Resposta: $x=6$ minimiza o comprimento da dobra $y$

14.




$\theta = \alpha + \beta$

Da figura temos:

$$\begin{cases} tg\,\alpha = \dfrac{a}{2} \\ tg\,\beta = \dfrac{3-a}{5} \end{cases}$$

Além disso sabemos que:

$$tg\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\theta} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}}$$

$$= \frac{\frac{a}{2} + \frac{3-a}{5}}{1 - \frac{a}{2} \cdot \frac{3-a}{5}} = \frac{\frac{5a+6-2a}{10}}{1 - \frac{3a-a^2}{10}}$$

$$= \frac{\frac{3a+6}{10}}{\frac{10-3a+a^2}{10}} = \frac{3a+6}{a^2-3a+10}$$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{3a+6}{a^2-3a+10}}$$

/ /

Da figura vemos que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Logo, o valor máximo de $\theta$ coincidirá com o valor máximo de $tg\theta$.

Podemos então maximizar $tg\theta$:

$$tg\theta = \frac{3a+6}{a^2-3a+10}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\,tg\theta}{da} = \frac{3}{a^2-3a+10} - \frac{3a+6}{(a^2-3a+10)^2}(2a-3)$$

$$0 = \frac{3(a^2-3a+10)-(3a+6)(2a-3)}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$= \frac{3a^2-9a+30-(6a^2-9a+12a-18)}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$= \frac{3a^2-9a+30-(6a^2+3a-18)}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$= \frac{-3a^2-12a+48}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -3a^2-12a+48=0$$

$$a^2+4a-16=0$$

$$a = -4 \pm \sqrt{16+64}\,/2$$

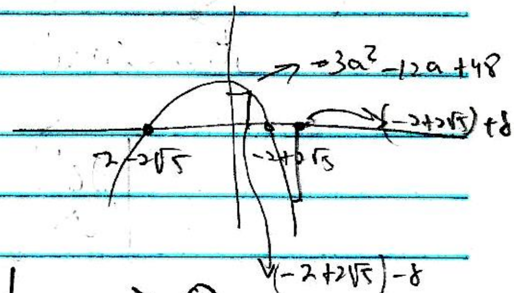
$$= -4 \pm \sqrt{80}\,/2$$

## 14 - Cont.

$$a = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

| | |
|---|---|
| 80 | 2 |
| 40 | 2 |
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$$\boxed{a = -2 + 2\sqrt{5}}$$




$$\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{d\,tg\theta}{da}\right|_{(-2+2\sqrt{5})-\delta} = \left.\dfrac{\overbrace{-3a^2-12a+48}^{>0}}{\underbrace{(a^2-3a+10)^2}_{>0}}\right|_{(-2+2\sqrt{5})-\delta} > 0 \\[2ex] \left.\dfrac{d\,tg\theta}{da}\right|_{(-2+2\sqrt{5})+\delta} = \left.\dfrac{\overbrace{-3a^2-12a+48}^{<0}}{\underbrace{(a^2-3a+10)^2}_{>0}}\right|_{(-2+2\sqrt{5})+\delta} < 0 \end{array}\right.$$

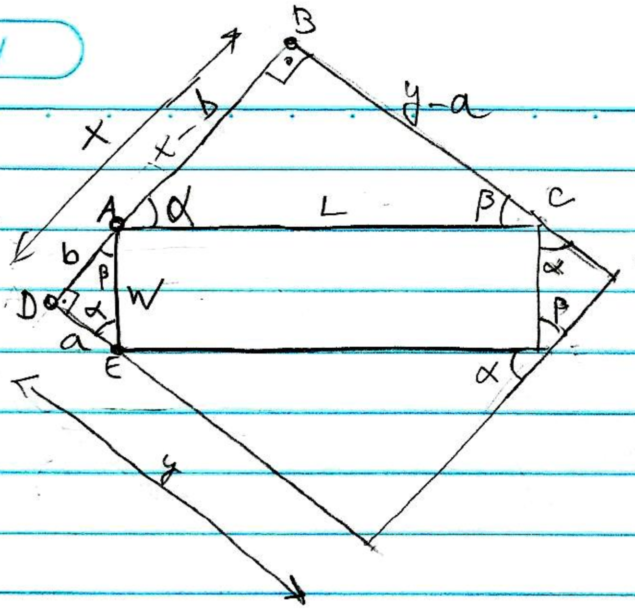
$\therefore$ $(-2+2\sqrt{5})$ é pto. de máximo.

Daí: $b = 3 - a = 3 - (-2+2\sqrt{5})$

$= \underline{5 - 2\sqrt{5}}$

**Resposta:** A fim de maximizar o ângulo $\theta$, o ponto $P$ deve estar à uma distância $5-2\sqrt{5}$ do ponto $A$.

15.




$S = xy \longrightarrow$ maximizar $S$.

Relações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = W^2 \\ \Delta_{ABC} \sim \Delta_{EDA} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{L}{W} = \dfrac{y-a}{b} \\ \dfrac{L}{W} = \dfrac{x-b}{a} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{L}{W} = \frac{y-a}{b} \Leftrightarrow \quad y = \frac{Lb}{W} + a \qquad (*)$$

$$\frac{L}{W} = \frac{x-b}{a} \Leftrightarrow \quad x = \frac{La}{W} + b \qquad (**)$$

$$\therefore \quad S = xy = \left(\frac{Lb}{W} + a\right)\left(\frac{La}{W} + b\right)$$

tilibra

$$S = \frac{L^2 ab}{W^2} + \frac{L b^2}{W} + \frac{L a^2}{W} + ab$$

$$= ab\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right) + \frac{L}{W}\left(a^2+b^2\right)$$

$$= ab\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right) + \frac{L}{\cancel{W}}\, W^{\cancel{2}}$$

$$S = ab\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right) + LW$$

$$\boxed{S = a\sqrt{W^2-a^2}\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right) + LW}$$

$$\frac{dS}{da} = \sqrt{W^2-a^2}\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right) + \frac{a}{\cancel{2}\sqrt{W^2-a^2}}(-\cancel{2}a)\left(\frac{L^2}{W^2}+1\right)$$

$$0 = \left(\frac{L^2}{W^2}+1\right)\left(\sqrt{W^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{W^2-a^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sqrt{W^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{W^2-a^2}} = 0$$

$$\frac{W^2-a^2-a^2}{\sqrt{W^2-a^2}} = 0 \qquad (a \neq W)$$

$$W^2 = 2a^2 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{W}{\sqrt{2}}}$$

$$a^2+b^2=W^2 \Rightarrow b^2 = W^2 - a^2$$

$$= W^2 - \frac{W^2}{2}$$

$$= \frac{W^2}{2}$$

$$b = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

Daí, substituindo $a = b = \frac{W}{\sqrt{2}}$ em (*) e (**) obtêm-se

$$\begin{cases} y = \frac{L}{\cancel{W}} \frac{\cancel{W}}{\sqrt{2}} + \frac{W}{\sqrt{2}} = \frac{L+W}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{L}{\cancel{W}} \frac{\cancel{W}}{\sqrt{2}} + \frac{W}{\sqrt{2}} = \frac{L+W}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\therefore$

$$S = xy = \frac{L+W}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L+W}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S = \frac{(L+W)^2}{2}}$$