

## Lista 2 [Parte 1]

Gráfico; função injetiva, sobrejetiva, bijetiva; função par, ímpar

Esboce o gráfico da  $f$  determinando seu domínio e imagem [questões 1 - 16].

1.  $f(x) = -4x + 3$

2.  $f(x) = 4x - 3$

3.  $f(x) = -3$

4.  $f(x) = 3$

5.  $f(x) = 4 - x^2$

6.  $f(x) = -(4 - x^2)$

7.  $f(x) = |x - 4|$

8.  $f(x) = |x| - 4$

9.  $f(x) = \frac{x}{|x|}$

10.  $f(x) = x + |x|$

11.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

12.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ 0 & \text{se } x \text{ não é inteiro} \end{cases}$$

13.

$$f(x) = \begin{cases} -5 & \text{se } x < -5 \\ x & \text{se } -5 \leq x \leq 5 \\ 5 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

14.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

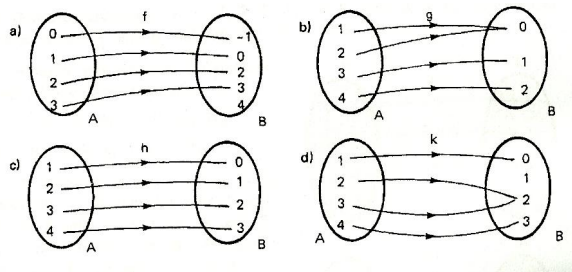
15.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } |x| < 1 \\ 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

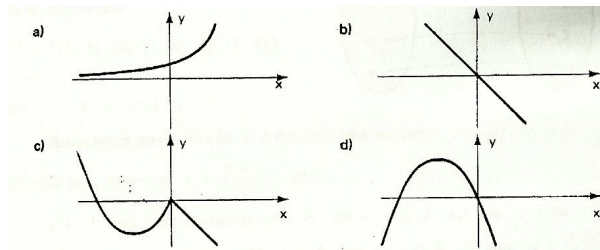
16.

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{se } 1 < x < 2 \\ x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

17. Verifique em cada caso (a), (b), (c), (d) se a função  $A \rightarrow B$  é injetiva, ou sobrejetiva, ou bijetiva.



18. A partir do gráfico, verifique se a função é injetiva, sobrejetiva, ou bijetiva (assuma o contradomínio de cada função como sendo  $\mathbb{R}$ ).



19. Classifique as funções seguintes em

(I) injetiva    (II) sobrejetiva    (III) bijetiva    (IV) não é sobrejetiva nem injetiva <sup>1</sup>

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - x^2$

<sup>1</sup>Nesta questão, tente usar os critérios analíticos de injetividade e sobrejetividade, i.e.

(i)  $f : X \rightarrow Y$  é injetiva se  $\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ .

(ii)  $f : X \rightarrow Y$  **não** é injetiva se  $\exists a, b \in X, a \neq b$  com  $f(a) = f(b)$ .

(iii)  $f$  é sobrejetiva se  $\forall b \in Y, \exists a \in X$  tal que se tem  $f(a) = b$ .

(iv)  $f : X \rightarrow Y$  **não** é sobrejetiva se  $\exists b \in Y$  tal que  $\nexists x \in X$  satisfazendo  $f(x) = b$ .

(c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $h(x) = |x - 1|$

(d)  $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $m(x) = 3x + 2$

(e)  $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n(x) \equiv \llbracket x \rrbracket$

(Obs:  $\llbracket x \rrbracket :=$  maior inteiro menor ou igual a  $x$ )

(f)  $p : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $p(x) = \frac{1}{x}$

(g)  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(x) = x^3$

(h)  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x) = |x|(x - 1)$

20. Determine o valor de  $b$  em  $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq b\}$  de modo que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow B$  definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  seja sobrejetiva.

21. Determine o maior valor de  $a$  em  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$  de modo que a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) := 2x^2 - 3x + 4$  seja injetiva.

22. Classifique as funções a seguir em

(I) injetiva (II) sobrejetiva (III) bijetiva (IV) não é sobrejetiva nem injetiva

(Sugestão: Faça a análise a partir do gráfico de cada função)

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

(c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

(d)  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(e)  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(f)  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \llbracket x \rrbracket & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

(Obs:  $\llbracket x \rrbracket :=$  maior inteiro menor ou igual a  $x$ )

23. Os conjuntos  $A$  e  $B$  tem respectivamente  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  elementos. Considera-se uma função  $f : A \rightarrow B$ . Qual a condição sobre  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  para que  $f$  possa ser injetiva? E para  $f$  ser sobrejetiva? E para  $f$  ser bijetiva?
24. Quantas funções injetivas existem entre  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{c, d, e, f\}$ ?
25. Quantas funções sobrejetivas existem entre  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{d, e\}$ ?

**Classifique as funções a seguir em (I) par, (II) ímpar ou (III) sem paridade [questões 26 - 35].**

26.  $f(x) = 3x^3 - 4x$

27.  $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$

28.  $f(x) = 9 - 5x^2$

29.  $f(x) = 2x^5 - 4x^3$

30.  $f(x) = 2$

31.  $f(x) = 2x^3 + x^2$

32.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

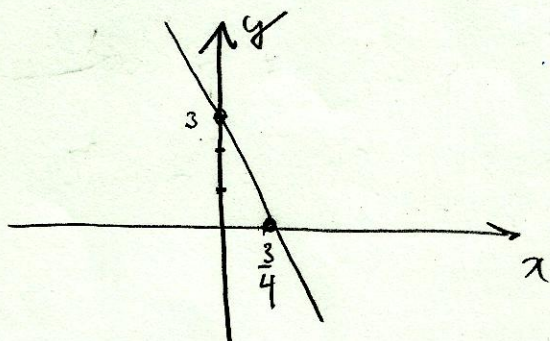
33.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

34.  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

35.  $f(x) = |x| + 5$

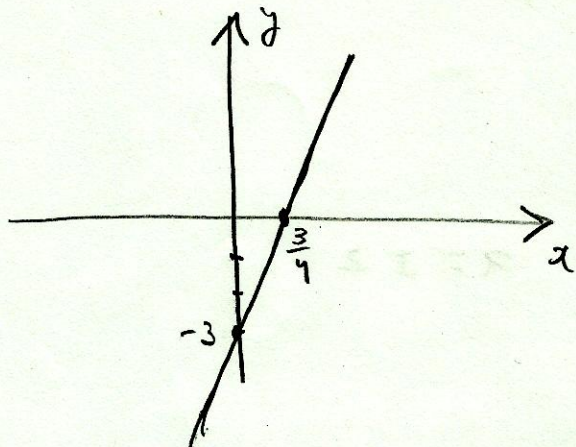
# Lista 2

1.  $f(x) = -4x + 3$



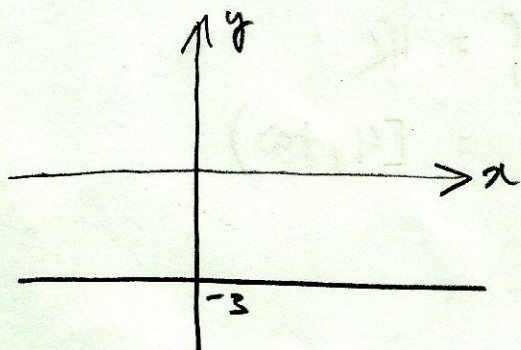
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2.  $f(x) = 4x - 3$



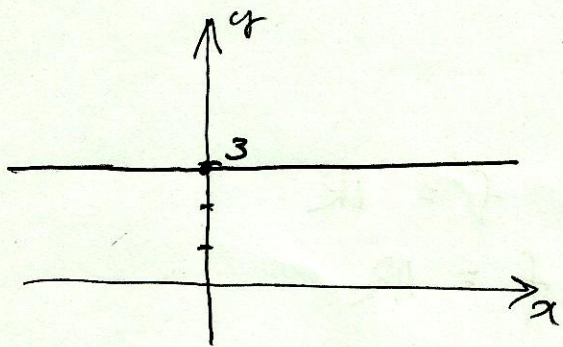
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

3.  $f(x) = -3$



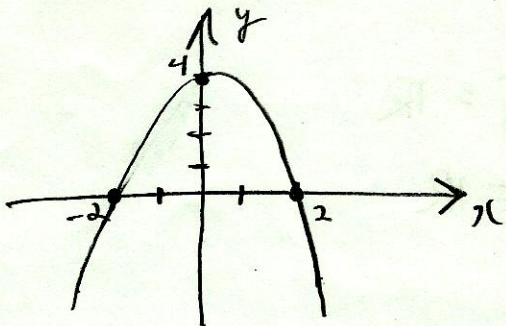
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{-3\} \end{array} \right\}$$

4.  $f(x) = 3$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{3\} \end{array} \right\}$$

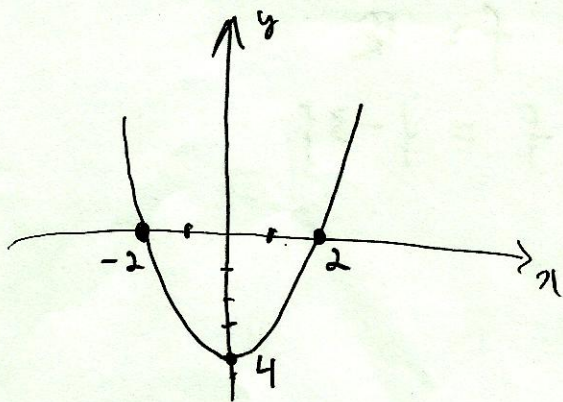
5.  $f(x) = 4 - x^2$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (-\infty, 4] \end{array} \right\}$$

$$4 - x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 4 \quad \therefore \quad x = \pm 2$$

6.  $f(x) = -(4 - x^2) = -4 + x^2$

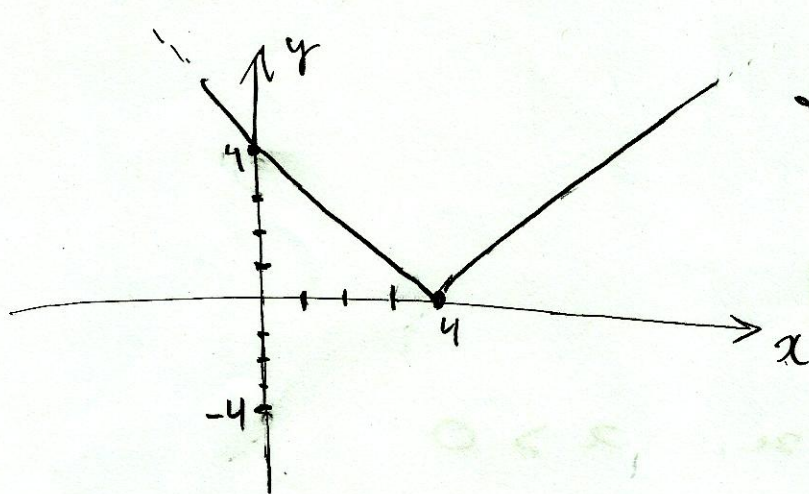


$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [4, +\infty) \end{array} \right\}$$

$$7. f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{re } x-4 > 0 \therefore x > 4 \\ 0 & \text{re } x-4 = 0 \therefore x = 4 \\ -(x-4) & \text{re } x-4 < 0 \therefore x < 4 \end{cases}$$

i.e.

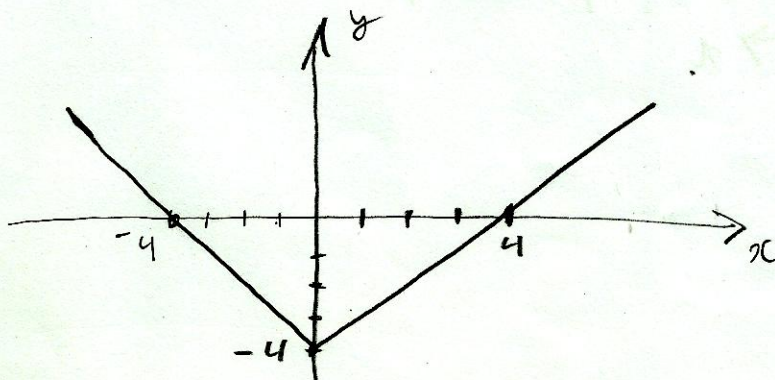
$$f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{re } x > 4 \\ 0 & \text{re } x = 4 \\ -x+4 & \text{re } x < 4 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [0, +\infty) \end{array} \right\}$$

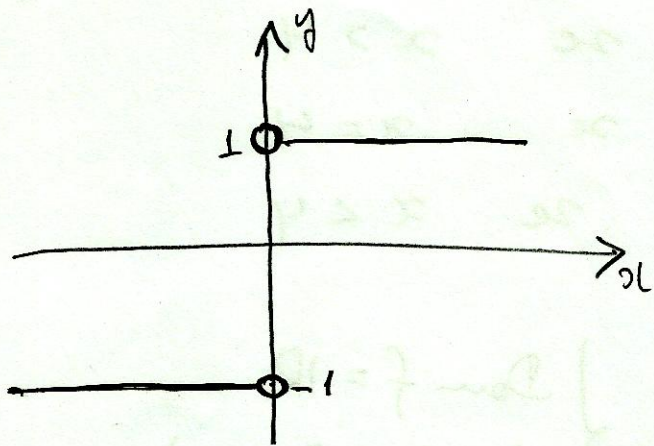
$$8. f(x) = |x| - 4$$

$$|x| - 4 = \begin{cases} x-4 & \text{re } x > 0 \\ -4 & \text{re } x = 0 \\ -x-4 & \text{re } x < 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [-4, +\infty) \end{array} \right\}$$

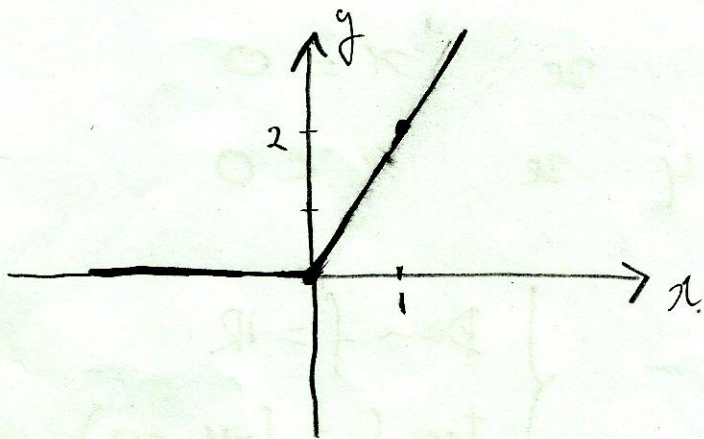
9.  $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{Im } f = \{-1, 1\} \end{cases}$

10.  $f(x) = x + |x|$

$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

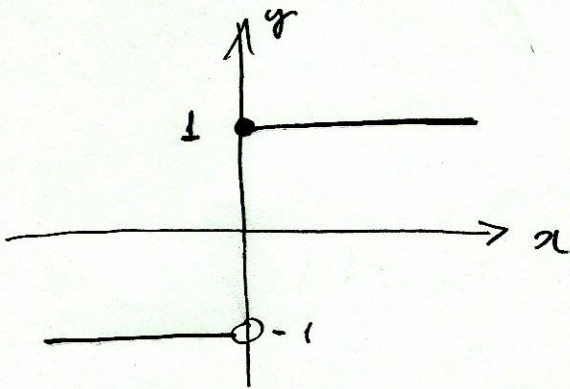


$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [0, +\infty) \end{cases}$



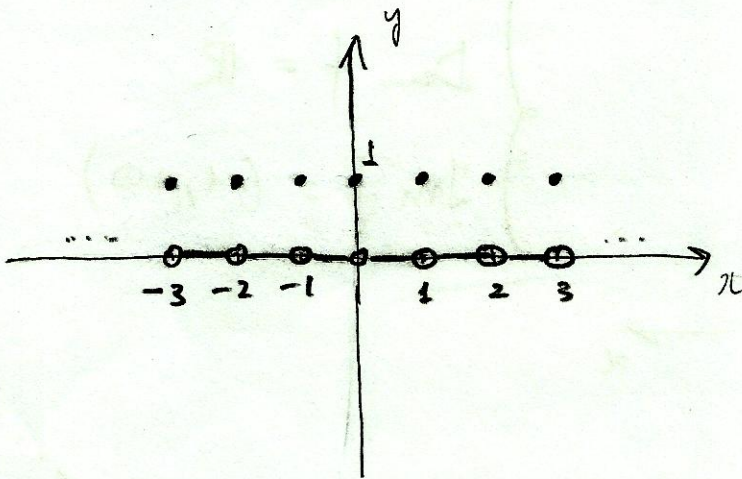
11.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



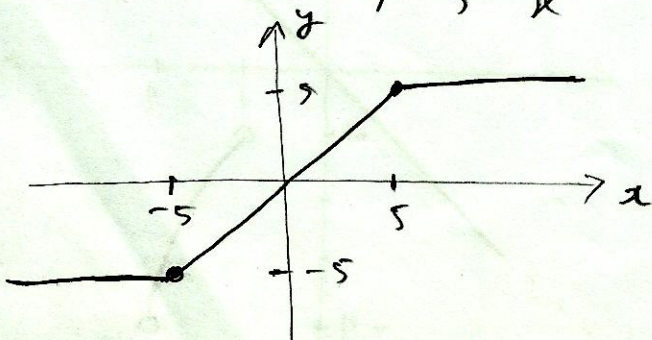
$$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{-1, 1\} \end{cases}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

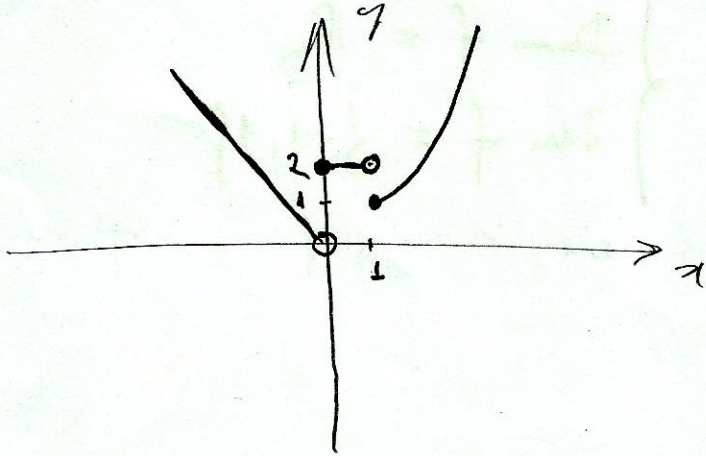


$$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{0, 1\} \end{cases}$$

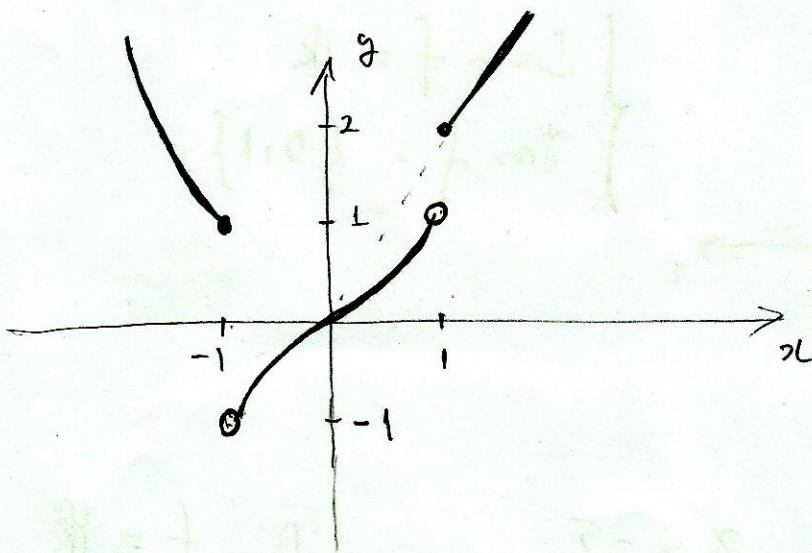
$$13. \quad f(x) = \begin{cases} -5 & x < -5 \\ x & -5 \leq x \leq 5 \\ 5 & x > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [-5, 5] \end{cases}$$



$$14. \quad f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (0, +\infty) \end{array} \right\}$$

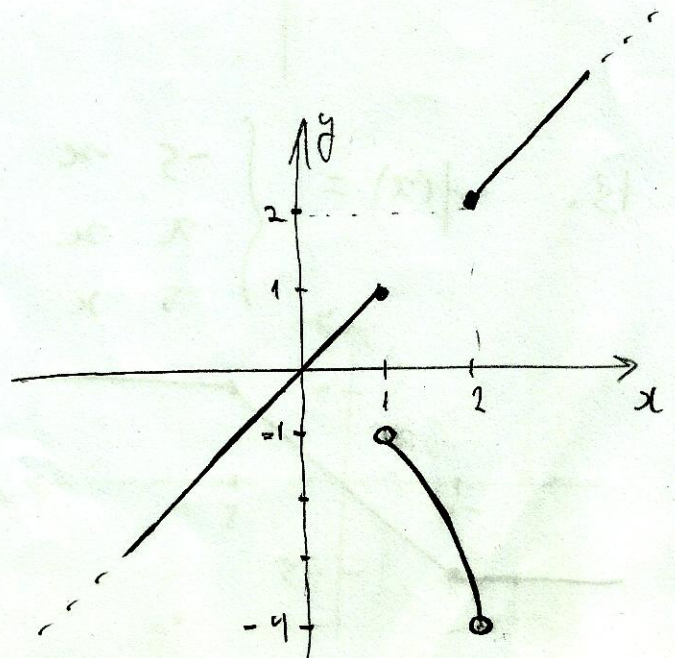


$$15. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x^3 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (-1, +\infty) \end{array} \right\}$$

$$16. \quad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ -x^2 & 1 < x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } g = \mathbb{R} \\ \text{Im } g = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \end{array} \right\}$$

- 17.
- a)  $f$  é injetiva
  - b)  $g$  é sobrejetiva
  - c)  $h$  é bijetiva
  - d)  $k$  não é nem injetiva nem sobrejetiva

- 18.
- a) injetiva
  - b) bijetiva
  - c) sobrejetiva
  - d) não é nem injetiva nem sobrejetiva

- 19.
- a) bijetiva
  - b) não é nem injetiva nem sobrejetiva
  - c) sobrejetiva
  - d) injetiva
  - e) sobrejetiva
  - f) bijetiva
  - g) bijetiva
  - h) sobrejetiva

20)  $b = 2$

21)  $a = \frac{3}{4}$

- 22)
- a) bijetiva
  - b) sobrejetiva
  - c) injetiva
  - d) sobrejetiva
  - e) sobrejetiva
  - f) sobrejetiva

- 23.
- $f$  injetiva se  $m \leq n$
  - $f$  sobrejetiva se  $n \leq m$ ;  $f$  bijetiva se  $m = n$

24. 12

25. 6

26. ímpar

27. par

28. par

29. ímpar

30. par

31. sem paridade

32. sem paridade

33. par

34. sem paridade

35. par