Cálculo A - Prova 2

1. Determine o valor de a de modo que $f(x)$ seja uma função contínua

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, x \leq 1 \\ 2a + x, x > 1 \end{cases}$$ 1.5

2. Usando a definição de derivada como um limite, mostre que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$ 1.0

3. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right)$$ 1.5

4. Seja y uma função implícita de x determinada por $x^3 + y^3 = 4xy$. Usando derivação implícita calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto $(2, 2)$. 2.0

1.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \leq 1 \\ 2a + x, & x > 1 \end{cases}$$

f é contínua para valores $x \neq 1$ pois a regra que define f determina função contínua para $x < 1$ e $x > 1$.

Devemos testar apenas a continuidade da $f(x)$ em $x = 1$.

$\lim_{x \to 1} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2a + x = 2a + 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases}$$

Assim, para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$ devemos ter

$$\underbrace{\lim_{x \to 1^+} f(x)}_{2a+1} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$2a + 1 = 0$$

$$\therefore \quad a = -1/2 .$$

Para esta escolha de $\underline{\underline{a}}$ temos

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Em particular

$$f(1) = 0 = \lim_{x \to 1} f(x)$$

Daí f é contínua se tomarmos

$\underline{\underline{a = -\frac{1}{2}}}$.

2. $$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \lim_{z \to x} \frac{\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} x}{z - x}$$

Seja $\begin{cases} w = \operatorname{arctg} z \to \operatorname{tg} w = z \,; \quad w \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ a = \operatorname{arctg} x \to \operatorname{tg} a = x \end{cases}$

Então, quando $z \to x$ tem-se $w \to \operatorname{arctg} x = a$, daí

$$\lim_{z \to x} \frac{\operatorname{arctg} z - \operatorname{arctg} x}{z - x} =$$

$$= \lim_{w \to a} \frac{w - a}{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} a}$$

$$= \lim_{w \to a} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} a}{w - a}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{w \to a} \frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} a}{w - a}}_{\left.\frac{d \operatorname{tg} w}{dw}\right|_{w=a} = \sec^2 a}}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 a}$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right) \frac{\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{9x^2}+1 - \cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+1} + 3x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{9x^2+1}}_{\infty} + \underbrace{3x}_{\infty}} = 0$$

4. $x^3+y^3 = 4xy$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(4xy\right)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 4y + 4x\frac{dy}{dx}$$

$$\left(3y^2-4x\right)\frac{dy}{dx} = 4y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x^2}{3y^2-4x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,2)} = \frac{4\cdot 2 - 3\cdot 2^2}{3\cdot 2^2 - 4\cdot 2}$$

$$= \frac{8-12}{12-8} = \frac{-4}{4} = -1$$

1.0

Mas, a eq. da reta tangente ao gráfico no ponto (2,2) é dada por

$$y = \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,2)}\right)x + q$$

$$y = -x + q$$

Mas (2,2) sendo ponto da reta nos dá que

$2 = -2 + q \quad \therefore \quad q = 4 \quad \therefore \quad \boxed{y = -x + 4}$

1.0