Cálculo 3 - Lista 10

Teorema de Stokes e Gauss

Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ é a borda da superfície Ω. Assuma a orientação de γ como induzida pela orientação de Ω.

1. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e Ω é parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no primeiro octante e com vetor normal com componente z negativa.

2. $\vec{F} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} - 2x\vec{k}$ e Ω é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante e com vetor normal com componente z positiva.

3. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ e Ω é composto de parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ situado entre os planos $z = 0$ e $z = 1$ e da parte do plano $z = 1$ situado dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. O vetor normal é tal que na superfície do cilindro ele se afasta do eixo z, e no plano $z = 1$ ele aponta na direção positiva de z.

Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$
onde γ é orientada no sentido anti-horário.

4. $\vec{F} = xz\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ onde γ é a interseção do plano $x + y + z = 5$ e do cilindro elíptico $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

5. $\vec{F} = y(x^2 + y^2)\vec{i} - x(x^2 + y^2)\vec{j}$ onde γ é o retângulo com vértices $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$.

Use teorema de Stokes para calcular $\int_\Omega (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

6. $\vec{F} = x\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{j} + z(y^4 - 1)\vec{k}$ e Ω é parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ acima do plano xy e entre os planos $y = -1$ e $y = 1$ com vetor normal com componente z positiva.

7. $\vec{F} = xz^2\vec{i} + x^3\vec{j} + \cos xz\vec{k}$ onde Ω é parte do elipsóide $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ abaixo do plano xy. Ω tem vetor normal apontando para fora.

8. Suponha que Ω é uma superfície orientada com borda γ. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial constante definido em Ω. Mostre que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

9. Seja Ω um elipsóide com vetor normal direcionado para fora. Seja $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ um campo vetorial cujas componentes F_1, F_2, F_3 tem derivadas parciais contínuas em Ω. Mostre que $\int_\Omega (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$.

Use o teorema de Gauss para calcular $\int_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{S}$
onde Ω é orientada com vetor normal apontando
para fora.

10. $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} - 2xz\vec{k}$ e Ω é o tetraedro com vértices $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

11. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e Ω é a superfície que é borda da região sólida no primeiro octante, dentro do cilndro $x^2 + y^2 = 1$ e entre os planos $z = 0$ e $z = 1$.

12. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e Ω é composto do hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ no plano xy.

13. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e Ω é a borda da região sólida situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e entre os planos $z = 0$ e $z = 2$.

14. $\vec{F} = y(x^2+y^2)^{3/2}\vec{i} - x(x^2+y^2)^{3/2}\vec{j} + (z+1)\vec{k}$ e Ω é a borda da região sólida limitada acima pelo plano $z = 2x$ e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

15. Use o teorema de Gauss para calcular $\int_B \nabla \cdot F dV$ onde $\vec{F} = (x^2+y^2+z^2)(x\vec{i} + y\vec{j})$ e B é a região sólida definida por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

16. Seja $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e seja B uma região sólida simples tendo por borda uma superfície Ω com vetor normal apontando para fora. Mostre que o volume V da região sólida é dado por

$$V = \frac{1}{3}\int_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Respostas

1. $-4/3 - \pi/4$
2. $-3\pi/4$
3. -2π
4. 0
5. $-8/3$
6. 0
7. $-3\pi/4$
10. $1/24$
11. $\frac{3\pi}{4}$
12. 2π
13. 16π
14. $\pi/2$
15. $\frac{8\pi}{3}$