

Cálculo 3 - Lista 3

(1) Funções vetoriais

Determine o domínio e as componentes das funções vetoriais a seguir

1. $\vec{F}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}$

Res.: $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R}$; $F_1(t) = t$, $F_2(t) = t^2$, $F_3(t) = t^3$

2. $\vec{F}(t) = \sqrt{t+1} \vec{i} + \sqrt{t-1} \vec{j} + \vec{k}$

Res.: $\text{dom } \vec{F} = [1, \infty)$; $F_1(t) = \sqrt{t+1}$, $F_2(t) = \sqrt{t-1}$, $F_3(t) = 1$

3. $\vec{F}(t) = \tanh t \vec{i} - \frac{1}{t^2-4} \vec{k}$

Res.: $\text{dom } \vec{F} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $F_1(t) = \tanh t$, $F_2(t) = 0$, $F_3(t) = -\frac{1}{t^2-4}$

4. $\vec{F}(t) = [(t^2 - 1) \vec{i} + \ln t \vec{j} + \cot t \vec{k}] \times [(4 - t^2) \vec{i} + e^{-5t} \vec{j} + \frac{1}{t} \vec{k}]$

Res.: $\text{dom } \vec{F} = \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (n\pi, (n+1)\pi) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup \dots$; $F_1(t) = \frac{\ln t}{t} - e^{-5t} \cot t$, $F_2(t) = (4-t^2) \cot t - \frac{t^2-1}{t}$,
 $F_3(t) = (t^2 - 1)e^{-5t} - (4 - t^2) \ln t$

5. $\vec{F}(t) = (t \vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - t^2 \vec{j} + 2\sqrt{t} \vec{k})$

Res.: $\text{dom } \vec{F} = [0, \infty)$; $F_1(t) = 2\sqrt{t}$, $F_2(t) = -2t\sqrt{t}$, $F_3(t) = -(t^3 + 1)$

6. $\vec{F} - \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = 2t \vec{i} + t^2 \vec{j} - \ln t \vec{k}$, $\vec{G}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + 2t \vec{k}$

Res.: $\vec{H} := \vec{F} - \vec{G}$; $\text{dom } \vec{H} = (0, \infty)$; $H_1(t) = 2t - e^t$, $H_2(t) = t^2 - e^{-t}$, $H_3(t) = -\ln t - 2t$

7. $2\vec{F} - 3\vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}$, $\vec{G}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}$

Res.: $\vec{H} := 2\vec{F} - 3\vec{G}$; $\text{dom } \vec{H} = \mathbb{R}$; $H_1(t) = 2t - 3 \cos t$, $H_2(t) = 2t^2 - 3 \sin t$, $H_3(t) = 2t^3 - 3$

8. $\vec{F} \times \vec{G}$ com $\vec{F}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}$, $\vec{G}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}$

Res.: $\vec{H} := \vec{F} \times \vec{G}$; $\text{dom } \vec{H} = \mathbb{R}$; $H_1(t) = t^2 - t^3 \sin t$, $H_2(t) = t^3 \cos t - t$, $H_3(t) = t \sin t - t^2 \cos t$

9. $\vec{F} \times \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{t}} \vec{k}$, $\vec{G}(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j}$

Res.: $\vec{H} := \vec{F} \times \vec{G}$; $\text{dom } \vec{H} = (0, \infty)$; $H_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(1 - \cos t)$, $H_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}(t - \sin t)$, $H_3(t) = -t(t - \sin t)$

10. $f\vec{F}$ onde $\vec{F}(t) = \ln t \vec{i} - 4e^{2t} \vec{j} + \frac{\sqrt{t-1}}{t} \vec{k}$, $f(t) = \sqrt{t}$

Res.: $\text{dom } f\vec{F} = [1, \infty)$; $(f\vec{F})_1 = \sqrt{t} \ln t$, $(f\vec{F})_2 = -4\sqrt{t} e^{2t}$, $(f\vec{F})_3 = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}}$

11. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sqrt{t+2} \vec{k}$, $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$

Res.: $\text{dom } (\vec{F} \circ g) = [-8, \infty)$, $(\vec{F} \circ g)_1 = \cos t^{1/3}$, $(\vec{F} \circ g)_2 = \sin t^{1/3}$, $(\vec{F} \circ g)_3 = \sqrt{t^{1/3} + 2}$

12. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = e^{-2t} \vec{i} + e^{(t^2)} \vec{j} + t^3 \vec{k}$, $g(t) = \ln t$

Res.: $\text{dom } (\vec{F} \circ g) = (0, \infty)$, $(\vec{F} \circ g)_1 = \frac{1}{2^{\ln t}}$, $(\vec{F} \circ g)_2 = t^{\ln t}$, $(\vec{F} \circ g)_3 = (\ln t)^3$

(2) Limites e continuidade de funções vetoriais

Calcule os limites caso existam

13. $\lim_{t \rightarrow 4} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

Res.: $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

14. $\lim_{t \rightarrow -1} (3\vec{i} + t\vec{j} + t^5\vec{k})$

Res.: $3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

15. $\lim_{t \rightarrow \pi} (\tan t \vec{i} + 3t\vec{j} - 4\vec{k})$

Res.: $3\pi\hat{j} - 4\hat{k}$

16. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \vec{i} + e^t \vec{j} + (t + \sqrt{2})\vec{k} \right)$

Res.: $\hat{i} + \hat{j} + \sqrt{2}\hat{k}$

17. $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} 5\vec{i} - \sqrt{2t^2 + 2t + 4}\vec{j} + e^{-(t-2)}\vec{k}, & t < 2 \\ (t^2 + 1)\vec{i} + (4 - t^3)\vec{j} + \vec{k}, & t > 2 \end{cases}$$

Res.: $5\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

18. $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t\vec{i} + e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{j} + t^2\vec{k}, & t \neq 0 \\ \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$$

Res.: $\vec{0}$

19. $\lim_{t \rightarrow 0} (\vec{F} - \vec{G})$ com $\vec{F}(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{i} + \cos t \vec{j} + t^3\vec{k}$, $\vec{G}(t) = -\pi \vec{i} + \frac{1+\cos t}{t}\vec{j}$

Res.: \nexists

20. $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{F} \cdot \vec{G}$ com $\vec{F}(t) = \frac{\sin(t-1)}{t-1}\vec{i} + \frac{t+3}{t-2}\vec{j} + \cos \pi t\vec{k}$, $\vec{G}(t) = (t^2 + 1)\vec{i} - \frac{t-2}{t+3}\vec{j} - \sqrt{t^2 + 1}\vec{k}$

Res.: $1 + \sqrt{2}$

21.

$$\lim_{t \rightarrow 3} \left(\frac{t^2 - 5t + 6}{t-3}\vec{i} + \frac{t^2 - 2t - 3}{t-3}\vec{j} + \frac{t^2 + 4t - 21}{t-3}\vec{k} \right)$$

Res.: $\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$

22.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 + 1}{t-1}\vec{i} + \frac{t^2 - 1}{t+1}\vec{j} + \frac{t^2 + 7t - 8}{t-1}\vec{k} \right)$$

Res.: \nexists

23.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\ln t}{t-1}\vec{i} - \frac{e^t - e}{t-1}\vec{j} + \frac{t+1}{t^2}\vec{k} \right)$$

Res.: $\hat{i} - e\hat{j} + 2\hat{k}$

24.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}\vec{i} + \frac{t-1}{t+1}\vec{j} - \frac{\sinh t}{t}\vec{k} \right)$$

Res.: $\frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

25.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \vec{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \vec{j} + e^{2t} \vec{k} \right)$$

Res.: $\widehat{i} + \widehat{k}$

26.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3t}{t} \vec{i} + \frac{\tan 2t}{3t} \vec{j} + \ln(1+t) \vec{k} \right)$$

Res.: $3\widehat{i} + \frac{2}{3}\widehat{j}$

27.

$$\lim_{t \rightarrow 3} \left\{ \left(\frac{9-t^2}{3-t} \right) \vec{i} + \left(\frac{t^2+t-12}{t-3} \right) \vec{j} + \left(\frac{t^3-13t+12}{t-3} \right) \vec{k} \right\}$$

Res.: $6\widehat{i} + 7\widehat{j} + 14\widehat{k}$

28. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \vec{i} + \frac{t-1}{t+1} \vec{j} + \frac{\sin t^3}{t^2} \vec{k} \right)$

Res.: \widehat{j}

29. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t \vec{i} + 2t^{\frac{1}{4}} \vec{j} - \frac{\ln t}{t} \vec{k} \right)$

Res.: \nexists

30. $\lim_{t \rightarrow 1^+} \left(e^{\frac{1}{1-t}} \vec{i} + \sqrt{t-1} \vec{j} + \ln t \vec{k} \right)$

Res.: $\vec{0}$

31. $\lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-t} \vec{i} - (1-t) \ln(1-t) \vec{j} \right)$

Res.: $\vec{0}$

Determine os intervalos onde as funções vetoriais são contínuas

32. $\vec{F}(t) = 4t \vec{j} - \sqrt{5} \vec{k}$

Res.: \mathbb{R}

33.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, & t < 0 \\ (t^2 + 1) \vec{i} + \ln(t+3) \vec{j} + \vec{k}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Res.: $\mathbb{R} - \{0\}$

34.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} (2t+1) \vec{i} + (2t-1) \vec{j} + 4t \vec{k}, & t < -3 \\ (t-2) \vec{i} - (t+10) \vec{j} + (2t-9) \vec{k}, & t \geq -3 \end{cases}$$

Res.: $\mathbb{R} - \{-3\}$

35.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t \vec{i} + (3t-2) \vec{j} + (3-t) \vec{k}, & -\infty < t < 2 \\ 2 \vec{i} + (2+t) \vec{j} + t \vec{k}, & 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

Res.: $\mathbb{R} - \{2\}$

36.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t^2 \vec{i} + (3-t) \vec{j} + t \vec{k}, & -\infty < t < 1 \\ t \vec{i} + 2t \vec{j} + (2-t^2) \vec{k}, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

Res.: \mathbb{R}

(3) Derivadas de funções vetoriais

Encontre as derivadas das funções vetoriais a seguir

37. $\vec{F}(t) = t \vec{i} + \sqrt{t} \vec{j}$

Res.: $\hat{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \hat{j}$

38. $\vec{F}(t) = \sqrt{t} \vec{i} + t^{-\frac{3}{2}} \vec{j} + \ln(2t-1) \vec{k}$

Res.: $\frac{1}{2\sqrt{t}} \hat{i} - \frac{3}{2} t^{-5/2} \hat{j} + \frac{2}{2t-1} \hat{k}$

39. $\vec{F}(t) = \arcsin t \vec{i} + \sqrt{1+t^2} \vec{j} + e^{-t^3} \vec{k}$

Res.: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \hat{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \hat{j} - 3t^2 e^{-t^3} \hat{k}$

40. $\vec{F}(t) = e^{\sqrt{t}} \vec{i} + 3\vec{j} - \arccos 2t \vec{k}$

Res.: $\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \hat{i} + \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} \hat{k}$

41. $\vec{F}(t) = \tan t \vec{i} + \vec{j} + \sec t \vec{k}$

Res.: $\sec^2 t \hat{i} + \sec t \tan t \hat{k}$

42. $\vec{F}(t) = e^t \cos t \vec{i} - e^t \sin t \vec{k}$

Res.: $(e^t \cos t - e^t \sin t) \hat{i} + (-e^t \sin t - e^t \cos t) \hat{k}$

43. $\vec{F}(t) = \cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j} - \sqrt{t} \vec{k}$

Res.: $\sinh t \hat{i} + \cosh t \hat{j} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \hat{k}$

Sejam $f(t) = t^2 + 3$, $g(t) = 2t^3 - 3t$, $\vec{u}(t) = t \vec{i} - t^2 \vec{j} + 2t \vec{k}$, e $\vec{v}(t) = \vec{i} - 2t \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$. Determine

44. $\frac{d\vec{u}}{dt}$

Res.: $\hat{i} - 2t \hat{j} + 2 \hat{k}$

45. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{v}(t))$

Res.: $2t \hat{i} + (-6t^2 - 6) \hat{j} + (12t^3 + 18t) \hat{k}$

46. $\frac{d}{dt}(g(t)\vec{u}(t))$

Res.: $(8t^3 - 6t) \hat{i} + (-10t^4 + 9t^2) \hat{j} + (16t^3 - 12t) \hat{k}$

47. $\frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v})$

Res.: $(8t - 12t^3) \hat{i} + (2 - 9t^2) \hat{j} - 2t \hat{k}$

48. $\frac{d}{dt}(\vec{u} \times t\vec{v}), \frac{d}{dt}(t\vec{u} \times \vec{v}), \frac{d}{dt}(t(\vec{u} \times \vec{v}))$

Res.: $(12t^2 - 15t^4) \hat{i} + (4t - 12t^3) \hat{j} - 3t^2 \hat{k}$

49. $\frac{d}{dt}(2\vec{u} \cdot \vec{v})$

Res.: $2 + 48t^2$

50. $\frac{d}{dt}(3\vec{u} + 4\vec{v})$

Res.: $3\hat{i} + (-6t - 8)\hat{j} + (6 + 24t)\hat{k}$

51. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u} + g(t)\vec{v})$

Res.: $9t^2\hat{i} + (-20t^3 + 6t)\hat{j} + (6 - 21t^2 + 30t^4)\hat{k}$

52. $\vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt} - f(t)\vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$

Res.: $(-6t^3 + 4t - 14t^4 - 42t^2)\hat{i} + (-6t^2 + 28t^5 + 84t^3)\hat{j} + (-2t - 42t^6 - 126t^4)\hat{k}$

53. Prove que para funções diferenciáveis $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{w}(t)$ tem-se

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt}$$

54. Seja $\vec{u}(t)$ uma função diferenciável com comprimento constante (isto é $|\vec{u}| = \text{cte}$ para todo $t \in \text{dom } \vec{u}$). Mostre que em qualquer ponto onde ocorre $\frac{d\vec{u}}{dt} \neq 0$ tem-se $\frac{d\vec{u}}{dt}$ perpendicular a \vec{u} . Qual a interpretação física desse resultado no caso onde $\vec{r}(t)$ representa a posição $\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$ de uma partícula?

55. Seja $\vec{v} = \vec{v}(s)$ uma função diferenciável e $s = s(t)$ uma função escalar diferenciável. Mostre que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

(Regra da cadeia para a diferenciação de funções vetoriais)

56. O teorema do valor médio para funções de uma variável diz que: se $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável para todo $t \in (a, b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que se tem $\frac{df}{dt}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Verifique se vale um resultado semelhante para funções vetoriais, isto é, dada uma função vetorial $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ satisfazendo

$$\vec{F}'(c) = \frac{\vec{F}(b) - \vec{F}(a)}{b - a} ?$$

57. Seja $\vec{F}(t) = \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j}$. Mostre que para todo $t \in \mathbb{R}$ os vetores $\vec{F}(t)$ e $\vec{F}''(t)$ são paralelos.

58. Mostre que

$$\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{F}') = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)$$

59. Suponha que $\vec{F}(t)$ é paralelo a $\vec{F}''(t)$ para todo t . Mostre que $\vec{F} \times \vec{F}'$ é constante.

(4) Integrais de funções vetoriais

Calcule as integrais das funções vetoriais a seguir

60. $\int dt (t^2 \vec{i} - (3t - 1) \vec{j} - \frac{1}{t^3} \vec{k})$
 Res.: $\frac{t^3}{3} \hat{i} - (\frac{3t^2}{2} - t) \hat{j} + \frac{1}{2t^2} \hat{k}$
61. $\int dt (t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + 3t^4 \vec{k})$
 Res.: $(t \sin t + \cos t) \hat{i} + (-t \cos t + \sin t) \hat{j} + \frac{3t^5}{5} \hat{k}$
62. $\int_a^b dt (t \vec{i} + t^2 \vec{j} - t^3 \vec{k})$
 Res.: $(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) \hat{i} + (\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}) \hat{j} + (-\frac{b^4}{4} + \frac{a^4}{4}) \hat{k}$
63. $\int_0^1 dt (t^2 \vec{i} - 2t \vec{j} + \sqrt{t} \vec{k})$
 Res.: $\frac{1}{3} \hat{i} - \hat{j} + \frac{2}{3} \hat{k}$
64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt (\cos t \vec{i} + \sin 2t \vec{j} + \cos^2 t \vec{k})$
 Res.: $\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} + (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}) \hat{k}$
65. $\int_1^4 dt (e^t \vec{i} + t^2 \vec{j} + \ln 2t \vec{k})$
 Res.: $(e^4 - e) \hat{i} + 21 \hat{j} + (11 \ln 2 - 3) \hat{k}$
66. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^t ds (s \tan s^3 \vec{i} + \cos e^s \vec{j} + e^{(s^2)} \vec{k})$. Encontre $\frac{d}{dt} \vec{F}(t)$.
 Res.: $t \tan t^3 \hat{i} + \cos e^t \hat{j} + e^{t^2} \hat{k}$
67. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^{t^2} ds (\cos s \vec{i} + e^{-(s^2)} \vec{j} + \tan s \vec{k})$. Encontre $\frac{d}{dt} \vec{F}(t)$.
 Res.: $2t \cos t^2 \hat{i} + 2te^{-t^4} \hat{j} + 2t \tan t^2 \hat{k}$