

Cálculo 3 - Lista 6

Integrais de Linha

Calcule as integrais de linha a seguir

1. $\int_{\gamma} (9 + 8y^{\frac{1}{2}}) ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 2t^{\frac{3}{2}}\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$.
2. $\int_{\gamma} y ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$, $-1 \leq t \leq 0$.
3. $\int_{\gamma} 2xyz ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
4. $\int_{\gamma} (1 + \frac{9}{4}z^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t^{\frac{3}{2}}\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{20}{3}$.
5. $\int_{\gamma} (y + 2z) ds$. γ é a trajetória triangular formada pelos segmentos de $(-1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$ a $(-1, 0, 0)$.

Nos exercícios a seguir calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t)$.

6. $\vec{F} = z\vec{i} - y\vec{j} - x\vec{k}$. $\vec{r}(t) = 5t\vec{i} - \sin t\vec{j} - \cos t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
7. $\vec{F} = y\vec{i} + xy\vec{j} + z^3\vec{k}$. $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
8. $\vec{F} = -z\vec{i} + x\vec{k}$. $\vec{r} = \cos(\pi - t)\vec{i} + \sin(\pi - t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.
9. $\vec{F} = 5e^{\sin \pi x}\vec{i} - 4e^{\cos \pi x}\vec{j}$. $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} - \ln(\cosh t)\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.

Calcule as integrais de linha dadas na forma $\int F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$

10. $\int_{\gamma} ydx - xdy + xyz^2dz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
11. $\int_{\gamma} e^x dx + xydy + xyzdz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = -t\vec{i} - t\vec{j} - 2t\vec{k}$, $-1 \leq t \leq 1$.
12. $\int_{\gamma} xydx + (x + z)dy + z^2dz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r} = (t + 1)\vec{i} + (t - 1)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $-1 \leq t \leq 2$.
13. $\int_{\gamma} \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{2}{1+y^2} dy$. γ é a parte do círculo unitário passando pelos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$.

14. $\int_{\gamma} x \ln(\frac{xz}{y}) dx + \cos(\frac{\pi xy}{z}) dy$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $1 \leq t \leq 2$.

15. Calcule $\int_{\gamma} ydx + zdy + xdz$. γ é a curva parametrizada pelos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(0, -5, 0)$, e de $(0, -5, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

16. Seja γ_1 a curva parametrizada por $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e γ_2 a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \sin t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \sin t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$. Calcule

$$\int_{\gamma_1} (xy + z) ds \text{ e } \int_{\gamma_2} (xy + z) ds$$

As respostas são iguais? Explique.

17. Seja uma curva parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, tal que $x(t) = k$ é constante. Seja $M(x, y, z)$ uma função contínua. Calcule

$$\int_{\gamma} M(x, y, z) dx$$

Respostas

1. $\frac{26\sqrt{13}}{3}$
2. $\frac{1}{54}(1 - 10^{\frac{3}{2}})$
3. $4\sqrt{2}(1 - \frac{1}{e})$
4. $\frac{2032}{63}$
5. $3\sqrt{2}$
6. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{21}{4}$
7. $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{\pi^4}{4}$
8. $-\pi$
9. 0
10. $-\frac{5}{3}$
11. $e^{-1} - e - \frac{2}{3}$
12. $\frac{57}{2}$
13. $\frac{\pi}{4}$
14. $4 \ln 2 - \frac{9}{2}$
15. $\frac{5}{2}$
16. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
17. 0