Cálculo 3 - Lista 7

O teorema fundamental de integrais de linha

Nos exercícios a seguir mostre que as integrais de linha são independentes do caminho, e calcule as integrais.

1. $\int_\gamma (e^x + y)dx + (x + 2y)dy$ onde γ é qualquer curva suave por partes no plano xy de $(0, 1)$ a $(2, 3)$.

2. $\int_\gamma ydx + (x + z)dy + ydz$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\vec{i} + \cos \pi t\,\vec{j} + 2t \sin \pi t\,\vec{k},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}$.

3. $\int_\gamma (3x^2 + y)dx + xdy$ onde γ é a reta de $(2, 1, 5)$ a $(-3, 2, 4)$.

4. $\int_\gamma 3x^2yzdx + x^3zdy + (x^3y - 4z)dz$ onde γ é curva obtida pela interseção de $x^2+y^2+z^2 = 3$ e $y = x$, e indo de $(-1, -1, 1)$ até $(1, 1, -1)$.

5. $$\int_\gamma \frac{x}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dx + \frac{y}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dy + \frac{z}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\,dz$$

   onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^4\vec{k},\ 0 \le t \le 1$.

6. $\int_\gamma e^{-x} \ln y\, dx - \frac{e^{-x}}{y}dy + zdz$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t - 1)\vec{i} + e^{t^4}\vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k},\ 0 \le t \le 1$.

7. Suponha que f, g, h são funções contínuas. Prove que $\int_\gamma f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$ é independente do caminho escolhido.

8. Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.
   (a) Mostre que $\nabla \times \vec{F} = 0$.
   (b) Seja D uma região no plano que contem o círculo $x^2 + y^2 = 1$ mas não contêm a origem. Mostre que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não é independente do caminho em D. [SUGESTÃO: Calcule primeiro $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e depois $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ_1 é o semicírculo parametrizado por $\vec{r}_1(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j},\ 0 \le t \le \pi$, e γ_2 é o semicírculo parametrizado por $\vec{r}_2(t) = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j},\ 0 \le t \le \pi$.]

9. (a) Verifique se a integral de linha
   $$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy$$
   é independente do caminho no domínio $D = R^2 - \{(0, 0)\}$.
   (b) Verifique se a integral de linha
   $$\int_\gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dz$$
   é independente do caminho no domínio $\Omega = R^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

10. Em que domínio é a integral de linha
    $$\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$
    independente do caminho:
    (a) $x > 0$ (b) $x < 0$ (c) $y > 0$ (d) $y < 0$ (e) $x^2 + y^2 > 0$

11. A segunda lei da termodinâmica afirma que a integral de linha
    $$I := \int \frac{1}{T}(dU + PdV)$$
    é independente do caminho no plano UV.
    (a) As equações de estado de um gás ideal são $PV = nRT,\ U = f(T)$ onde n e R são constantes e $f(T)$ é uma dada função da temperatura. Dessa forma é mais conveniente tomar T e V como variáveis independentes e expressar P e U em termos de T e V. Se isto for feito mostre que
    $$I = \int \frac{k}{T}\,dT + \frac{nR}{V}\,dV, \text{ onde } k = \frac{dU}{dT}$$
    (b) Uma vez que a integral de linha é independente do caminho existe uma função $S(T, V)$, dita a *entropia*, tal que
    $$\int_\gamma \frac{k}{T}\,dT + \frac{nR}{V}\,dV = S(B) - S(A)$$
    onde γ é a curva ligando os pontos A e B. Mostre que se k é constante tem-se
    $$S = k \ln T + nR \ln V + S_0$$
    onde S_0 é uma constante.

12. Seja g uma função contínua de uma variável e considere

$$\vec{F}(x,y,z) = g(x^2+y^2+z^2)(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

(a) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.
[SUGESTÃO: Mostre que $\vec{F} = \nabla f$ onde $f(x,y,z) = \frac{1}{2}h(x^2+y^2+z^2)$ e $h(u) = \int g(u)du$]
(b) Mostre que $\vec{F}$ é irrotacional.

Respostas

1. $e^2 + 13$
2. 1
3. -43
4. -2
5. $\ln 2$
6. $\frac{1}{2}$

10.
(a) Independe
(b) Independe
(c) Independe
(d) Independe
(e) Depende