

### Cálculo 3 - Lista 8

#### Teorema de Green

Determine  $\int_{\gamma} M(x, y) dx + N(x, y) dy$  onde  $\gamma$  é orientada no sentido anti-horário.

1.  $\int_{\gamma} y dx$ , onde  $\gamma$  a curva no primeiro quadrante formada por parte do círculo  $x^2 + y^2 = 4$  e dos intervalos  $[0, 2]$  nos eixos  $x$  e  $y$ .

Res.:  $-\pi$

2.  $\int_{\gamma} xy dx + (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dy$ , onde  $\gamma$  é borda do quadrado com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

Res.:  $1/2$

3.  $\int_{\gamma} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy$ , onde  $\gamma$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

Res.:  $0$

Use o teorema de Green para calcular a integral de linha. Assuma que cada curva é orientada no sentido anti-horário.

4.  $\int_{\gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$  onde  $\gamma$  é composta de parte do gráfico de  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$  e dos intervalos  $[0, 25]$  nos eixos  $x$  e  $y$ .

Res.:  $0$

5.  $\int_{\gamma} xy dx + (\frac{1}{2}x^2 + xy) dy$  onde  $\gamma$  é composta do intervalo  $[-1, 1]$  sobre o eixo  $x$  e a parte de cima da elipse  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

Res.:  $1/6$

6.  $\int_{\gamma} (\cos^3 x + e^x) dx + e^y dy$  onde  $\gamma$  é o gráfico de  $x^6 + y^8 = 1$ .

Res.:  $0$

Nos exercícios a seguir use o teorema de Green para calcular as integrais de linha  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\gamma$  é orientada no sentido anti-horário.

7.  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + 3x\vec{j}$  onde  $\gamma$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .

Res.:  $\pi$

8.  $\vec{F}(x, y) = y \sin x \vec{i} - \cos x \vec{j}$  onde  $\gamma$  é composta do semi-círculo  $x^2 + y^2 = 9$  com  $y \geq 0$  e a linha  $y = 0$  com  $-3 \leq x \leq 3$ .

Res.:  $0$

Nos exercícios a seguir use o teorema de Green para encontrar a área da região dada.

9. A região limitada pelo eixo  $y$ , a linha  $y = \frac{1}{4}$  e a curva parametrizada por  $\vec{r}(t) = \sin \pi t \vec{i} + t(1 - t)\vec{j}$  com  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ .

Res.:  $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}$

10. Sejam

$$M(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(a) Verifique que

$$\int_{\gamma} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_D dA \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

onde  $D$  é a região limitada pelos círculos:

$x^2 + y^2 = 4$  orientado no sentido anti-horário e  $x^2 + y^2 = 1$  orientado no sentido horário.

(b) Mostre que

$$\int_{\gamma} M(x, y) dx + N(x, y) dy \neq \int_D dA \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

onde  $D$  é o disco cuja borda é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

(c) O resultado em (b) viola o teorema de Green? Explique.

Res.: Não viola

11. Assuma que  $D$  é uma região do plano. Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curvas suaves fechadas em  $D$  ambas orientadas no sentido anti-horário. Suponha que  $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$  em  $D$ . Use o teorema de Green para mostrar que

$$\int_{\gamma_1} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_{\gamma_2} M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

12. (a) Seja  $\gamma$  o segmento de reta no plano unindo os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Mostre que

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

(b) Considere um polígono orientado no sentido anti-horário cujos vértices são  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Usando a parte

(a) mostre que a área do polígono é dada por

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + \frac{1}{2} (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + \frac{1}{2} (x_n y_1 - x_1 y_n)$$

(c) Encontre a área do quadrilátero com vértices  $(0, 0), (1, 0), (2, 3), (-1, 1)$ .

Res.: (c) 4