Cálculo B - Lista 9 (Complementos)

1. Seja uma curva $\gamma := \{(x(t), y(t)) : a \leq t \leq b\}$.
(i) Mostre que em termos do parâmetro t a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo x é dada por
$$S_\gamma = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt \quad (*)$$
(Analogamente, a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo y é dada por $S_\gamma = \int_a^b 2\pi x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$).
(ii) Use $(*)$ para calcular a área da região obtida pela rotação em torno do eixo x da curva parametrizada por $x(t) = h\cos t,\ \ y(t) = r$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (h e r constantes positivas).
(iii) Obtenha o mesmo valor usando apenas geometria elementar. (Sugestão: O que é a curva?)

2. Assuma que $[a, b] \subset (-1, 1)$. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, e seja S a área da superfície da região obtida pela rotação em torno do eixo x do gráfico de f com $a \leq x \leq b$. Mostre que $S = 2\pi(b - a)$. (Assim, para este caso particular, vemos que a área da superfície depende apenas do comprimento do intervalo $[a, b]$ e não da sua localização como subintervalo de $(-1, 1)$).

3. Seja uma curva $\gamma := \{(x(t), y(t)), a \leq t \leq b\}$. O centróide da curva γ é definido como sendo o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ onde
$$\overline{x} := \frac{\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt}{\text{comprimento da curva}}, \qquad \overline{y} := \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt}{\text{comprimento da curva}}$$
(i) Mostre que a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x é igual ao comprimento da curva vezes a distância que o centróide da curva se movimenta.
(ii) Usando (i), encontre a área da superfície do toro formado pela rotação em torno do eixo y de um círculo de raio a situado a uma distância b da origem, com $b \geq a$.

4. Usando a definição de centróide dada na questão 3, calcule o centróide da circunferência de raio 1 centrada na origem.

5. Determine a área da superfície do elipsóide obtido pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x. (Suponha $b > a$)

6. Seja uma esfera de raio r e $0 \leq a < r$. Determine a área da superfície da porção da esfera obtida pela rotação em torno do eixo x do gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ com $-a \leq x \leq a$.

7. Seja f contínua em $[a, b]$ e tal que seu gráfico esteja situado acima da reta $y = c$. Determine uma expressão para o volume V do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = c$ da região entre o gráfico de f e a reta $y = c$ com $a \leq x \leq b$.

8. Usando o resultado 7, determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região entre o gráfico de $y = \sqrt{x+1}$ e a reta $y = -1$ com $0 \leq x \leq 1$.

9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 1$ da região entre o gráfico de $y = \sin x$ e o eixo x com $0 \leq x \leq \pi$.

10. Suponha f e g são funções contínuas em $[a, b]$, e seja c tal que se tem $c \leq g(x) \leq f(x)$ com $a \leq x \leq b$. Determine uma expressão para o volume V do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = c$ da região entre os gráficos de f e g com $a \leq x \leq b$.

11. Usando o resultado 10, determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 1$ da região situada entre os gráficos de $y = x^2 - x + 1$ e $y = 2x^2 - 4x + 3$.

12. Seja a revolução em torno do eixo x da região limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$ e o eixo x com $x \geq 1$.
    (i) Mostre que o volume é finito mas a área da superfície é infinita.
    (ii) Pode-se dizer que uma área infinita pode ser pintada derramando uma quantidade finita de tinta neste sólido?

13. Seja f contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Assuma que $c \leq a$. Seja R a região entre o gráfico de f e o eixo x com $a \leq x \leq b$. Encontre uma fórmula para o volume V do sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $x = c$.

14. Usando o resultado obtido em 13, determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = -1$ da região entre o gráfico de $y = x^4$ e o eixo x com $0 \leq x \leq 1$.

15. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 2\pi$ da região entre o gráfico de $y = (2\pi - x)^{3/2}$ e o eixo x com $0 \leq x \leq \pi$.

16. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$ com $g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Seja R a região entre os gráficos de f e g com $a \leq x \leq b$ e assuma que $c \leq a$. Determine uma fórmula para o volume V do sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $x = c$.

17. Usando o resultado obtido em 16, determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = -1$ da região entre os gráficos de $y = 2x$ e $y = -2x^2 + 4x$.

18. Seja uma esfera de raio r. Seja R a região extraída da esfera cortando-a por um plano perpedicular ao seu raio e a uma distância h acima de seu centro. Mostre que R tem volume:

$$V = \frac{\pi(r-h)^2}{3}(2r+h)$$

Respostas

1.(ii) $2\pi r h$

3. (ii) $4\pi^2 ab$

4. $(0,0)$

5. $2\pi b^2 + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}\right|$

6. $4\pi r a$

7. $\int_a^b \pi(f(x)-c)^2\,dx$

8. $\frac{7\pi}{6} + \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$

9. $4\pi - \frac{\pi^2}{2}$

10. $\int_a^b \pi\left\{(f(x)-c)^2 - (g(x)-c)^2\right\}dx$

11. $\frac{7\pi}{30}$

13. $\int_a^b 2\pi(x-c)f(x)\,dx$

14. $\frac{11\pi}{15}$

15. $4\pi^{9/2}[2^{7/2}-1]$

16. $\int_a^b 2\pi(x-c)(f(x)-g(x))\,dx$

17. π