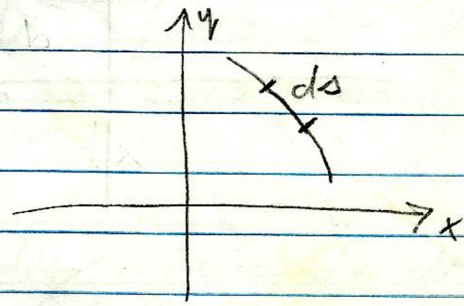
Área de uma Superfície de Revolução

Lembremos

Comprimento de arco de uma curva plana:

Se $\begin{cases} y = y(x) , \\ ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \end{cases}$



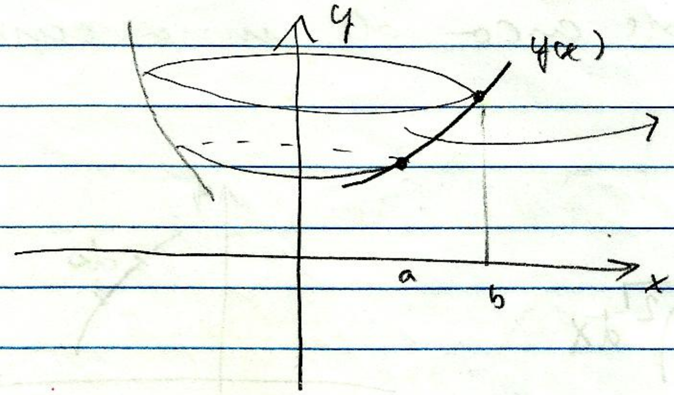
Se $\begin{cases} x = x(y) \\ ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \end{cases}$

Se $\begin{cases} y = y(t) , \quad x = x(t) \\ ds = \sqrt{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \end{cases}$ (não será usado)

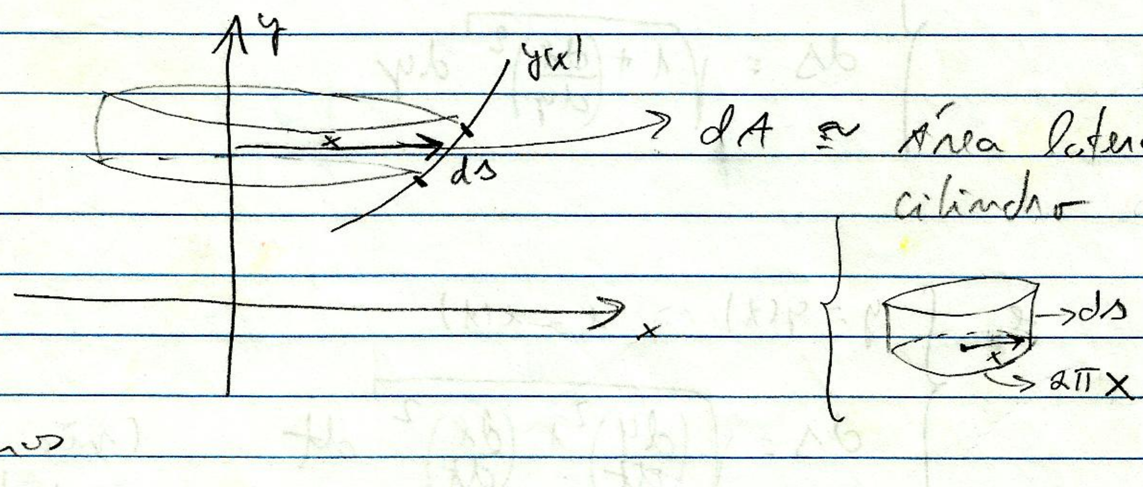
$p \Rightarrow q \iff \sim q \Rightarrow \sim p$

Consideremos agora o seguinte problema:

Calcular a área de uma superfície de revolução obtida pela rotação de uma curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$ em torno do eixo y.



Seja um elemento infinitesimal ds da curva $y = y(x)$, $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$



Temos

$$dA = 2\pi x \, \underline{ds}$$

que admite duas formas:

$$dA = 2\pi x \, ds = \begin{cases} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx & (1) \\ 2\pi x(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy & (2) \end{cases}$$

Daí obtém-se a área A como a soma da contribuição desses vários dA's, isto é:

Área de uma superfície obtida pela rotação de $y = y(x)$ em torno do eixo y

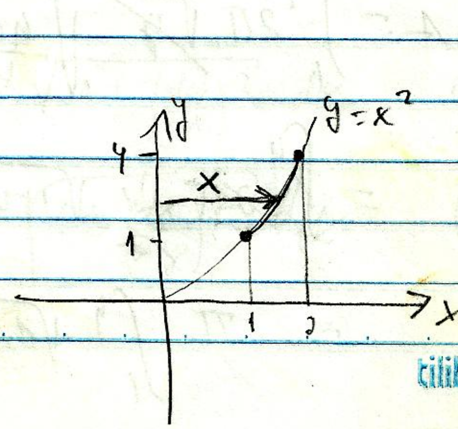
$$\boxed{\begin{array}{l} A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \quad \text{(usando dA na forma (1))} \\ \text{ou} \\ A = \int_c^d 2\pi x(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy \quad \text{(usando dA na forma (2))} \end{array}}$$

Exemplo

1) Encontre a área da superfície obtida pela rotação em torno do eixo y de parte da parábola $y = x^2$ com $1 \le x \le 2$.

Solução

Usando fórmula (1):



$$dA = 2\pi x \, ds = \begin{cases} 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx & (1) \\ 2\pi x(y) \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy & (2) \end{cases}$$

Daí obtém-se a área A como a soma da contribuição desses vários dA's, isto é:

Área de uma superfície obtida pela rotação de $y=y(x)$ em torno do eixo y

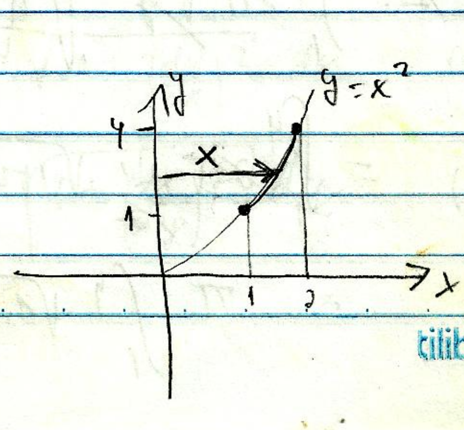
$$\boxed{\begin{aligned} A &= \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \text{(usando } dA \text{ na forma (1))} \\ &\text{ou} \\ A &= \int_c^d 2\pi x(y) \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \quad \text{(usando } dA \text{ na forma (2))} \end{aligned}}$$

Exemplo

1) Encontre a área da superfície obtida pela rotação em torno do eixo y de parte da parábola $y=x^2$ com $1 \leq x \leq 2$.

Solução

Usando fórmula (1):



$$dA = 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad y = x^2$$

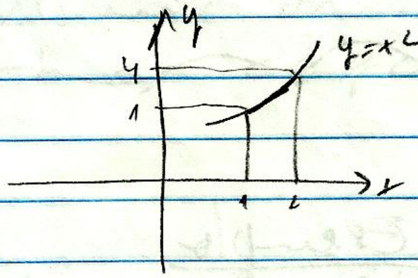
$$A = \int_1^2 2\pi x \sqrt{1+4x^2}\, dx \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$= 2\pi \frac{\cancel{2}}{3}\frac{1}{\cancel{8}_2}(1+4x^2)^{3/2}\Big]_1^2$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(1+4.4)^{3/2} - (1+4)^{3/2}\right]$$

$$\boxed{A = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)}$$

<u>Usando fórmula (2)</u>



$$dA = 2\pi x(y) \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \sqrt{y} \sqrt{1+\frac{1}{4y}}\, dy \qquad \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftarrow$$

$$A = \int_1^4 2\pi \cancel{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{4y+1}{4\cancel{y}}}\, dy$$

$$= \int_1^4 \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{2}} \sqrt{1+4y}\, dy$$

$$= \pi \int_1^4 \sqrt{1+4.y}\, dy = \pi . \frac{2}{3} . \frac{1}{4} (1+4y)^{3/2}\Big]_1^4$$

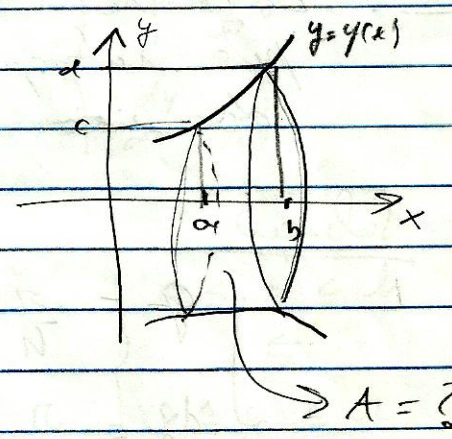
$$= \frac{\pi}{6}(1+4\cdot 4)^{3/2} - \frac{\pi}{6}(1+4\cdot 1)^{3/2}$$

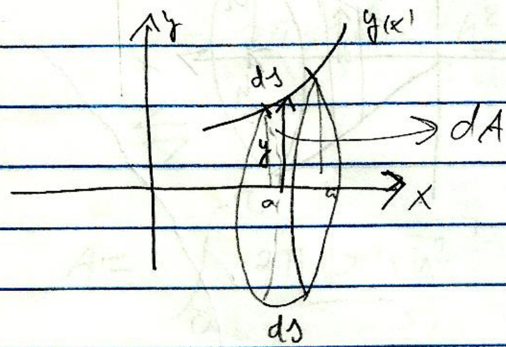
$$\boxed{A = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)}$$ (mesma expressão)

Ex.: Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação em torno do eixo x da curva $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

Solução

Seja um elemento infinitesimal ds da curva $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.





$$dA = 2\pi y\, ds = \begin{cases} 2\pi\, y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx & (1') \\ \text{ou} \\ 2\pi\, y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy & (2') \end{cases}$$

que nos dá duas possíveis expressões:

$$A = \int_a^b 2\pi\, y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$ (usando dA na forma (1'))

ou

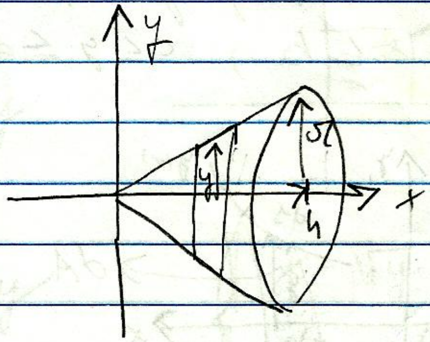
$$A = \int_c^d 2\pi\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$ (usando dA na forma (2'))

(Área de uma superfície obtida pela rotação de $y = y(x)$ em torno do eixo x)

Ex.: Encontre a área lateral do cone gerado pela rotação de $y = \frac{r}{h}x$ em torno do eixo x, $0 \le x \le h$

Solução

$$\begin{cases} y = \frac{r}{h}x \\ \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h} \end{cases}$$



Usando fórmula (1')

$$dA = 2\pi\, y(x)\, ds = 2\pi \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\Leftarrow$$

$$A = \frac{2\pi r}{h} \int_0^h x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = \frac{2\pi r}{h} \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h} \int_0^h x\, dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2}\, \frac{x^2}{2} \Big|_0^h \rightarrow$$

$$A = \frac{\pi r}{h^2} \sqrt{h^2+r^2}\, x^2 \Big|_0^h = \frac{\pi r}{h^2} \sqrt{h^2+r^2}\,(h^2 - 0^2)$$

$$= \frac{\pi r}{\cancel{h^2}} \sqrt{h^2+r^2}\, \cancel{h^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{A = \pi r \sqrt{h^2+r^2}}$$

Usando fórmula (2')

$$dA = 2\pi y\, ds$$

$$= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$x = \frac{h}{r} y \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{h}{r}$$

$$= 2\pi y \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, dy$$

$$= 2\pi y \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\, dy$$

$$0 \le x \le h \iff 0 \le y \le r$$

$$\iff$$

$$A = \int_0^r 2\pi \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\, y\, dy$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r} \frac{y^2}{2} \Big|_0^r$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \cancel{2}\pi \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\cancel{r}} \frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}$$

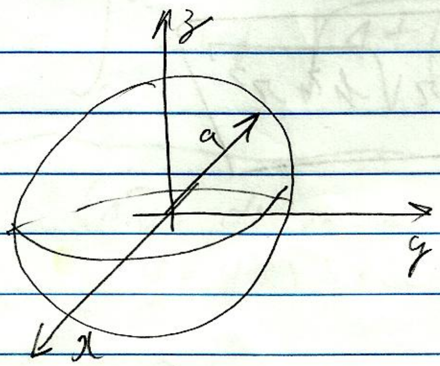
$$\therefore \quad \boxed{A = \pi r \sqrt{h^2+r^2}} \quad \underline{\text{OK!}}$$

tilibra

Ex.: Mostre que a área de uma superfície de raio $\underline{a}$ é $4\pi a^2$.

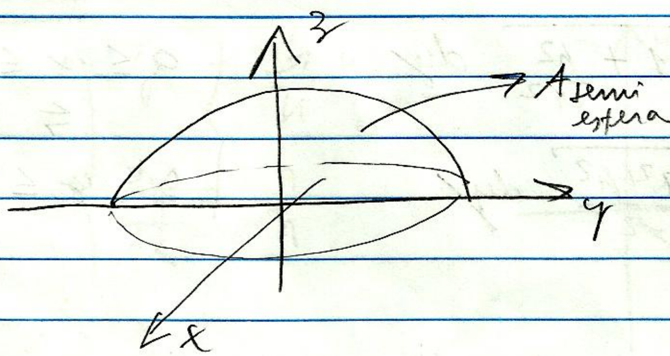
<u>Solução</u>

$$x^2+y^2+z^2 = a^2$$

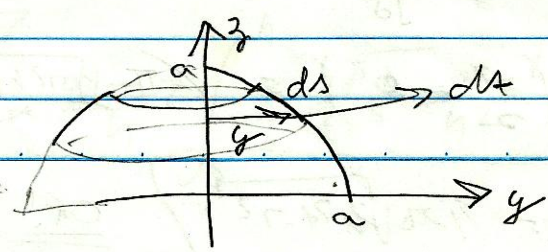


Podemos considerar a área da esfera como sendo

$$2 \times \text{Área semi esfera superior}$$



A semi-esfera superior pode ser vista como obtida pela rotação da curva $z = \sqrt{a^2-y^2}$ em torno do eixo z:



$$dA = 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$A = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= 2\pi \int_0^a y \sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^a y \sqrt{\frac{a^2}{a^2-y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi a \int_0^a \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi a (-)\sqrt{a^2-y^2}\,\Big]_0^a$$

$$= -2\pi a\left(\cancelto{0}{\sqrt{a^2-a^2}} - \sqrt{a^2-0^2}\right)$$

$$= 2\pi a \sqrt{a^2} = 2\pi a^2$$

$$\therefore \; // A_{\text{semi esfera}} = 2\pi a^2 //$$

$$\Downarrow$$

$$A_{\text{esfera}} = 2 A_{\text{semi esfera}}$$

$$\therefore \boxed{A = 4\pi a^2}$$: Área de uma esfera de raio a.