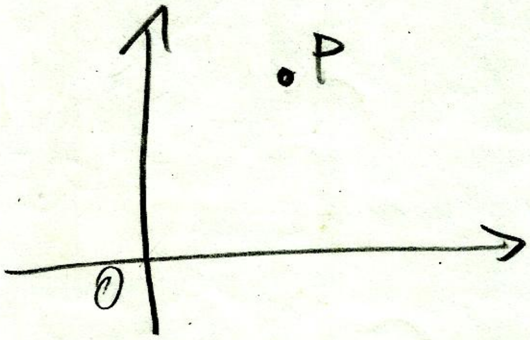
Coordenadas Polares

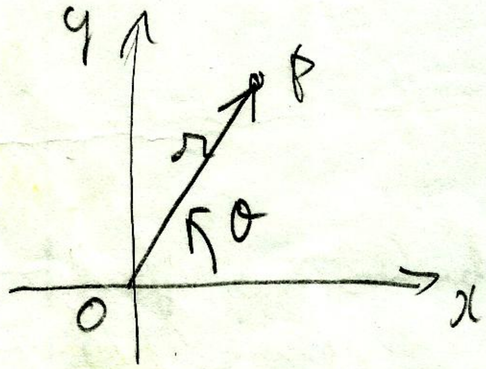
• **Sistema de coordenadas polares**



P ≠ origem

Como descrever o ponto $P \in \mathbb{R}^2$?

Toma-se:



$$\begin{cases} r = |\overline{OP}| \\ \theta = \text{ângulo}\,(Ox, \overline{OP}) \end{cases}$$

e escreve-se

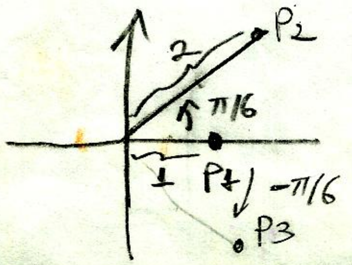
$$\boxed{P\ (r, \theta)}$$

θ é medido a partir do eixo Ox adotando a seguinte convenção:

$\theta > 0$ se medido no sentido anti-horário

$\theta < 0$ se medido no sentido horário

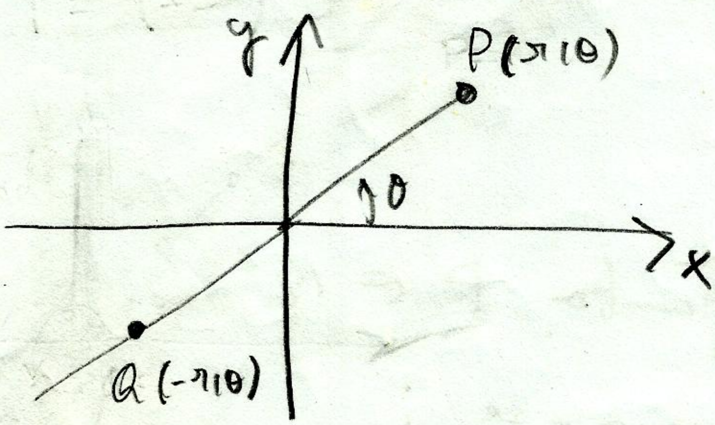
Ex: $P_1\ (1, 0)$, $P_2\ (2, \frac{\pi}{6})$, $P_3\ (2, -\frac{\pi}{6})$



Obs.:

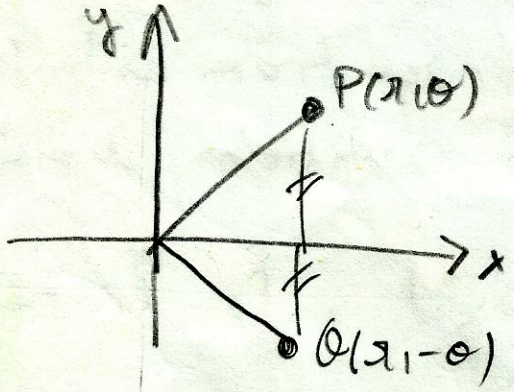
1) Seja $P\,(r,\theta)$, $r > 0$.

Por $Q\,(-r,\theta)$ entendemos o ponto no plano simétrico de P relativo à origem:



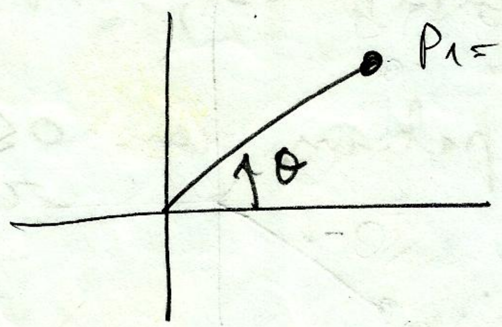
2) Seja $P(r,\theta)$, $\theta > 0$.

Por $Q(r,-\theta)$ entendemos o ponto no plano obtido pela reflexão de P em relação ao eixo x:



3)

$$\left.\begin{array}{l} P_1(r, \theta) \\ P_2(-r, \theta+\pi) \\ P_3(r, \theta+2n\pi) \\ P_4(-r, \theta+(2n+1)\pi) \end{array}\right\}$$ correspondem ao mesmo ponto no plano



4) A origem O do plano é descrita por

$$O(0, \theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

5) Se limitarmos $\underline{0 \leq \theta < 2\pi \;,\; r \geq 0}$ então qualquer ponto P que não seja a origem terá apenas uma representação

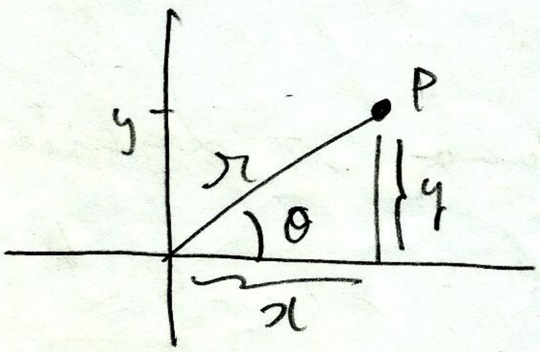
$$P(r, \theta).$$

• **Conversão entre coordenadas cartesianas e polares**

Seja $P \in \mathbb{R}^2$, tq.

$P(x, y)$: coordenadas cartesianas, $x, y \in \mathbb{R}$

$P(r, \theta)$: coordenadas polares com $0 \leq \theta < 2\pi$
$r > 0$



Temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Obs- Quando se converte de coordenadas cartesianas para polares determina-se r e θ aplicando $(*)$ junto com o conhecimento do quadrante onde o ponto $P(x, y)$ está situado.

Ex. Encontre as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas polares é $\left(3, \frac{23\pi}{6}\right)$

Solução

$$x = r\cos\theta = 3\cos\frac{23\pi}{6}$$

$$= 3\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{23\pi}{6} = 3\pi + \frac{5\pi}{6} = 4\pi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad = 3\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

$$y = r\sin\theta = 3\sin\frac{23\pi}{6}$$

$$= 3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \left\| P\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \right\|$$

Ex. Determine todos os conjuntos de coordenadas polares para o ponto P cujas coordenadas cartesianas são $(-5, 5\sqrt{3})$.

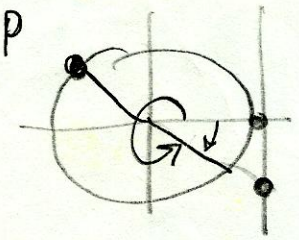
Solução

Inicialmente, devemos encontrar as coordenadas polares (r, θ) para o ponto P com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{25 + 25 \cdot 3} = 10$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{3}}{-5} = \operatorname{arctg} -\sqrt{3}$$

P



Mas $0 \leq \theta < 2\pi$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ // $\theta = \frac{2\pi}{3}$ pois P está no segundo quadrante //

$\therefore$ // $P(10, \frac{2\pi}{3})$ // $\longrightarrow$ $P(10, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$

$P(-10, \frac{2\pi}{3} + (2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$

Equações e gráficos em coordenadas polares

$f(x,y) = 0$: Eq. coordenadas cartesianas

Determina um conjunto de pontos no plano, por exemplo algo do tipo $y = y(x)$ ou $x = x(y)$.

Analogamente:

$f(r,\theta) = 0$: Eq. coordenadas polares

Determina um conjunto de pontos no plano, em geral algo do tipo $r = r(\theta)$.

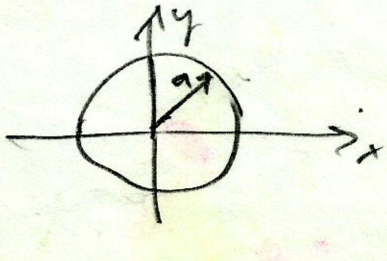
Ex. Determine a eq. do círculo $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ em coordenadas polares.

Solução

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$\therefore\; x^2+y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2$

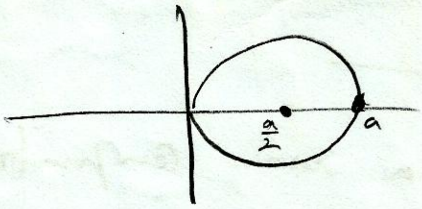
$\boxed{r = a}$ $(a>0)$



Ex: Determine a eq. do círculo

$x^2+y^2=ax$ em coordenadas polares

Solução



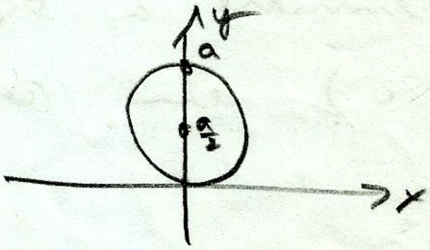
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$\therefore \quad x^2+y^2=ax \Rightarrow r^2 = a\,r\cos\theta$

$$\| \; r = a\cos\theta \; \|$$

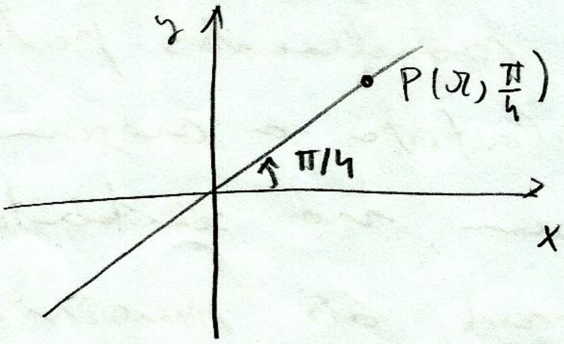
Obs. Analogamente, o círculo de equação $x^2+y^2=ay$ se escreve em coordenadas polares como

$$\| \; r = a\sin\theta \; \|$$



Ex. Determine a eq. polar da reta que passa pela origem e faz um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo positivo do x.

Solução

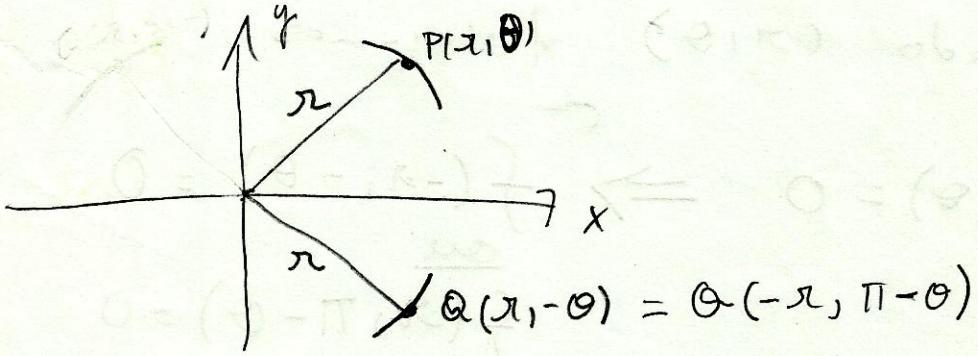


$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}.$$

Simetrias

Seja $\underbrace{f(r,\theta)=0}_{(r,\theta) \text{ está sobre a curva}} \Rightarrow$ curva em coordenadas polares.

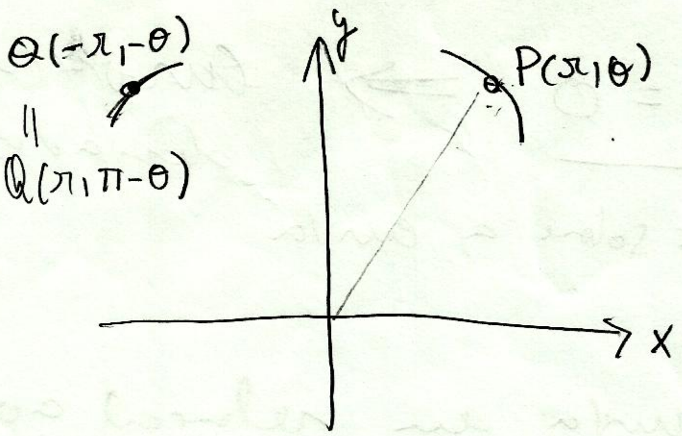
• **Simetria da curva em relação ao eixo x**



Para haver simetria da curva em relação ao eixo x temos que dado (r,θ),

$$\text{se } f(r,\theta)=0 \Rightarrow f(r,-\theta)=0 \text{ ou } f(-r,\pi-\theta)$$

- Simetria da curva em relação ao eixo y



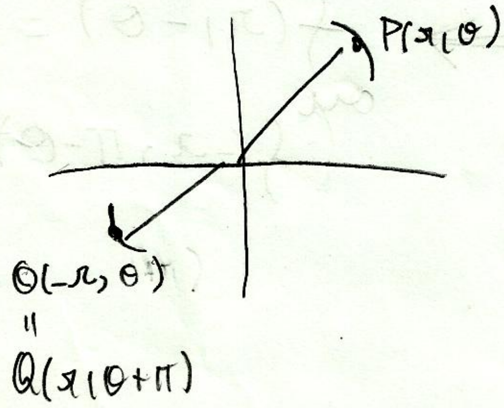
Haverá simetria em relação ao eixo y se dado (r,θ) tivermos

$$f(r,\theta)=0 \implies f(-r,-\theta)=0$$

<u>ou</u>

$$f(r,\pi-\theta)=0$$

- Simetria da curva em relação a origem



Haverá simetria em relação a origem se dado (r,θ) tivermos

$$f(r,\theta)=0 \implies f(-r,\theta)=0 \ \underline{\text{ou}}\ f(r,\theta+\pi)=0$$

68. faça o gráfico da cardióide $r = 1 + \sin\theta$

Solução

$f(r,\theta) = r - \sin\theta - 1$

Simetrias:

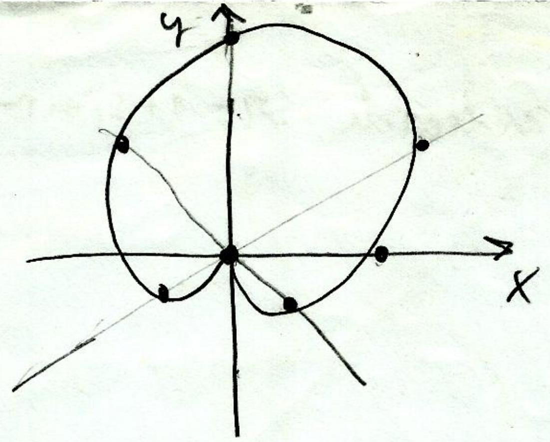
$$\left\{\begin{array}{ll}
f(r,-\theta) \neq f(r,\theta) & \text{eixo } x \\
f(-r,\theta) \neq f(r,\theta) & \text{origem} \\
f(-r,-\theta) = -r + \sin\theta - 1 \neq f(r,\theta) & \text{eixo } y \\
f(r,\pi-\theta) = r - \sin(\pi-\theta) - 1 & \\
\quad = f(r,\theta) & \underline{\underline{\text{eixo } y}} \\
f(-r,\pi-\theta) \neq f(r,\theta) & \text{eixo } x \\
f(r,\theta+\pi) \neq f(r,\theta) & \text{origem}
\end{array}\right.$$

$f(r,\theta)$ é simétrica em relação ao eixo y,

$\sin\theta$ tem período 2π logo podemos

tomar $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

θ	$-\pi/2$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = 1+\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2



Ex. Faça o gráfico da limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$

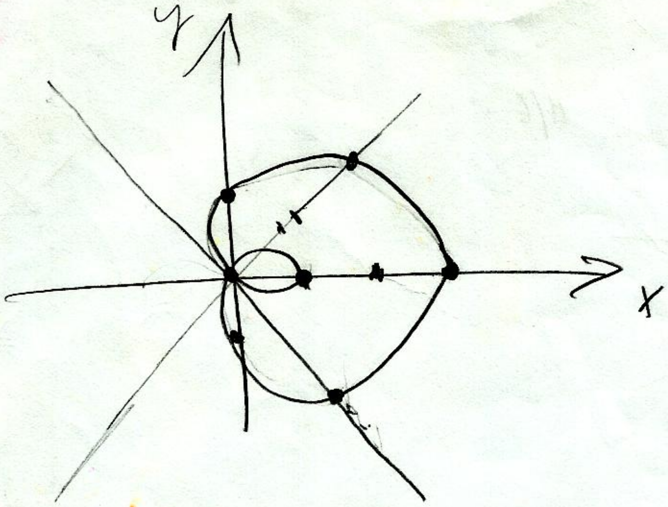
Simetria

$f(r,\theta) = r - \cos\theta - \frac{1}{2}$: $f(r,\theta) = f(r,-\theta)$: eixo x

nada se pode afirmar $\begin{cases} f(r, \pi-\theta) \neq f(r,\theta) & \text{eixo y} \\ f(-r, \theta) \neq f(r,\theta) & \text{origem} \end{cases}$

$\cos\theta$ tem período 2π, logo podemos tomar $0 \leq \theta \leq \pi$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$r = \frac{1}{2} + \cos\theta$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$



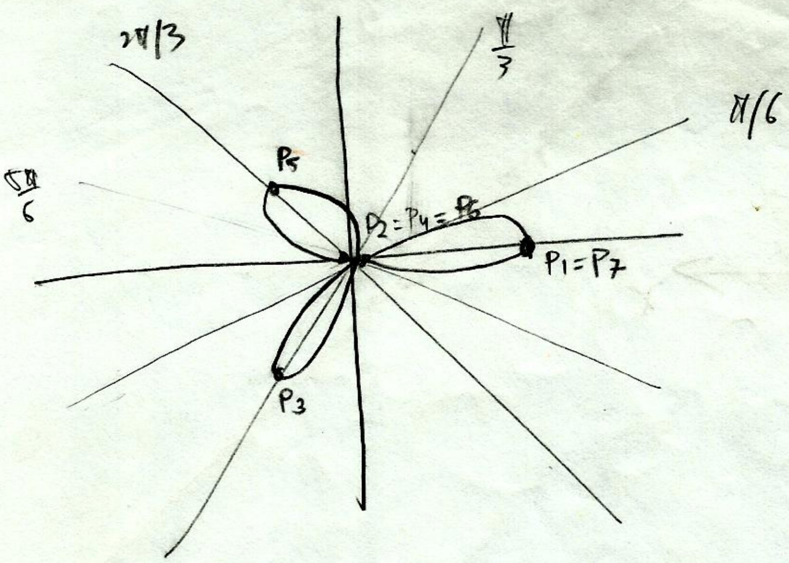
82. Faça o gráfico da rosa de três pétalos $r = \cos 3\theta$

$f(r,\theta) = r - \cos 3\theta$: $\begin{cases} f(r,-\theta) = f(r,\theta) \text{ : simetria eixo } x \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$r = \cos 3\theta$	1	-1	0	1	-1

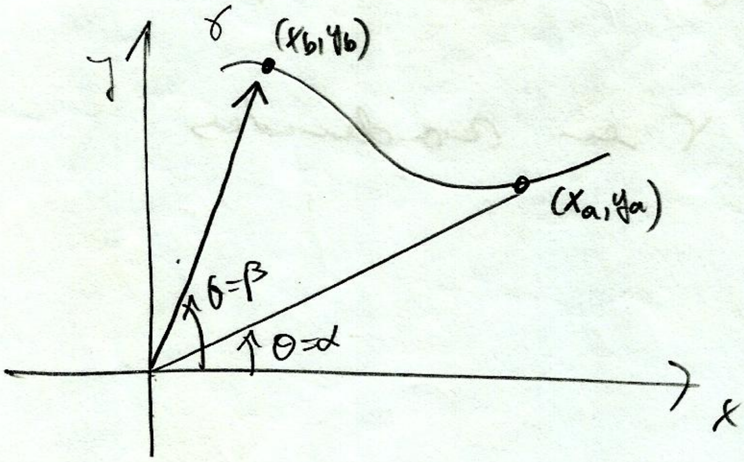
mais pontos

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = \cos 3\theta$	1	0	-1	0	1	0	-1
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7



2π/3
π/3
π/6
5π/6
P5
P2=P4=P6
P1=P7
P3

Comprimento de arco de uma curva em coordenadas polares



$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]\}$

Em coordenadas polares vemos que é possível descrever a curva γ tomando θ como sendo o parâmetro o que nos dá

$x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$.

Mas

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

logo em coordenadas polares sendo a curva γ escrita na forma

$\left.\begin{array}{l} x = x(\theta) \\ y = y(\theta) \end{array}\right\}$ isto nos obriga a ter $r = r(\theta)$

i.e.

$$\gamma : \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta & 0 \leq r \\ y = r(\theta)\sin\theta & \alpha \leq \theta \leq \beta \end{cases}$$

(descrição da curva γ em coordenadas polares)

Temos:

$$l_\gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Mas

$$\frac{dx}{d\theta} = \dot{r}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \dot{r}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta$$

$$\therefore \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \dot{r}^2(\theta)\cos^2\theta \cancel{- 2\dot{r}r\cos\theta\sin\theta} + r^2\sin^2\theta + \dot{r}^2(\theta)\sin^2\theta \cancel{+ 2\dot{r}r\sin\theta\cos\theta} + r^2\cos^2\theta$$

$$= \dot{r}^2 + r^2$$

$$\therefore \boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\theta}$$

Ex Determine o comprimento do círculo de raio $r = 5$.

Solução

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{25}\, d\theta$$

$$= 5 \int_0^{2\pi} d\theta = 5 \cdot 2\pi = 10\pi .$$

Ex. Determine o comprimento da cardióide

$r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta \qquad \frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \int \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} -2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2.2\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi} - 2\,2\sin\frac{\theta}{2}\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

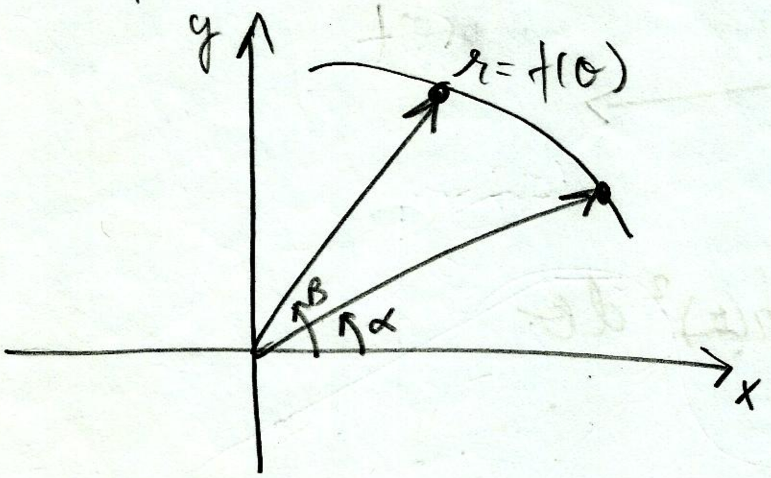
$$= 4\sin\frac{\pi}{2} - \cancel{4\sin\pi}^{\,0} + 4\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 4+4$$

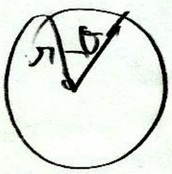
$$= 8$$

Área em coordenadas polares

Seja a área da região sob o gráfico da função f mostrada na figura

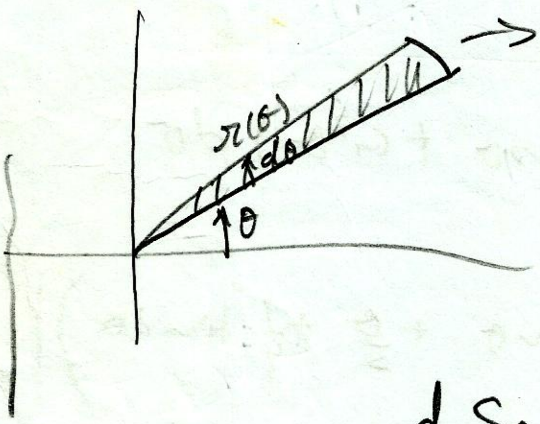


$f(\theta)$ contínua, positiva, com $\alpha \leq \theta \leq \beta$



$$\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{S_\theta}{\theta}$$

$$S_\theta = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

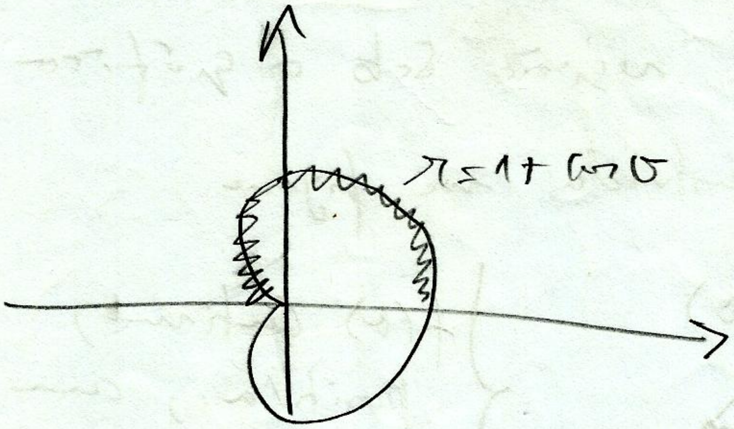


Área de um setor de um círculo de raio $r(\theta)$ subtendido por um ângulo $d\theta$:

$$dS_\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\therefore \boxed{S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta}$$

Ex. Encontre a área da região delimitada pela cardióide



$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$