Derivada Direcional

Seja $f(x,y)$ uma função.

Seja $\vec{u} := (u_1, u_2)$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$

Definimos a derivada direcional da função f no ponto (x,y) ao longo do vetor $\vec{u}$, denotado por $(D_{\vec{u}} f)(x,y)$, como sendo o limite

$$\boxed{(D_{\vec{u}} f)(x,y) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tu_1, y+tu_2) - f(x,y)}{t}}$$

obs.: Pode-se mostrar que, caso existam as derivadas parciais $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ então é possível escrever $(D_{\vec{u}} f)(x,y)$ como

$$(D_{\vec{u}} f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\, u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\, u_2$$

$$\equiv (\nabla f)(x,y) \cdot \vec{u}$$

onde denotamos:

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad (\text{vetor em } \mathbb{R}^2)$$

$\hookrightarrow$ é dito o <u>vetor gradiente</u> da $f(x,y)$.

Produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^2$

Aqui,

$$\left\{\begin{aligned} (\nabla f)(x,y) \cdot \vec{u} &= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\, u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\, u_2 \\ &\equiv (D_{\vec{u}} f)(x,y). \end{aligned}\right.$$

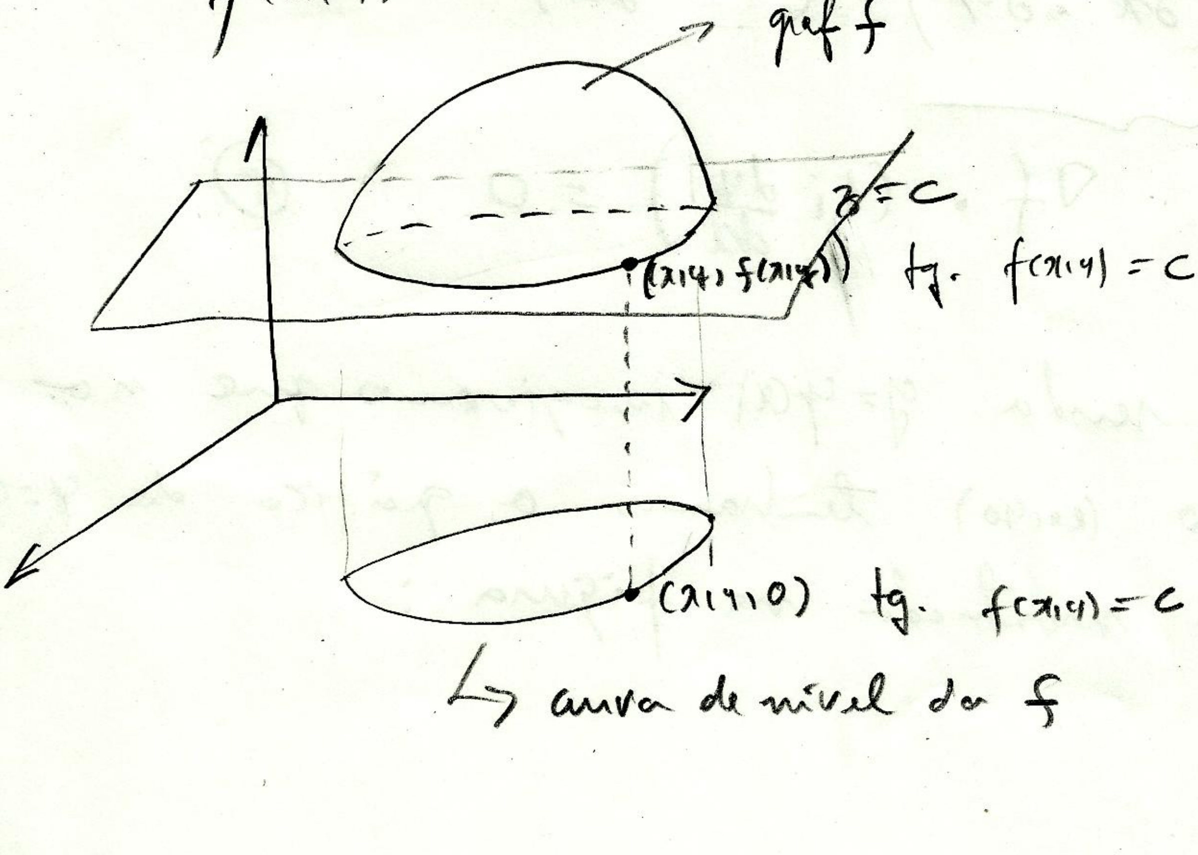
Obs: Interpretação geométrica do gradiente de uma função de 2-variáveis $f(x,y)$ (opcional)

Seja $f(x,y)$.

Considere $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$: gradiente da f

Seja a curva de nível associada ao gráfico da $f(x,y)$ com $z=c$, i.e. a curva no plano x,y cuja equação é

$$f(x,y) = c.$$



Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que na vizinhança deste ponto tenhamos

$$f(x,y) = c \qquad (*)$$

resultando em $y = y(x)$.

Diferenciação implícita de $(*)$ nos dá

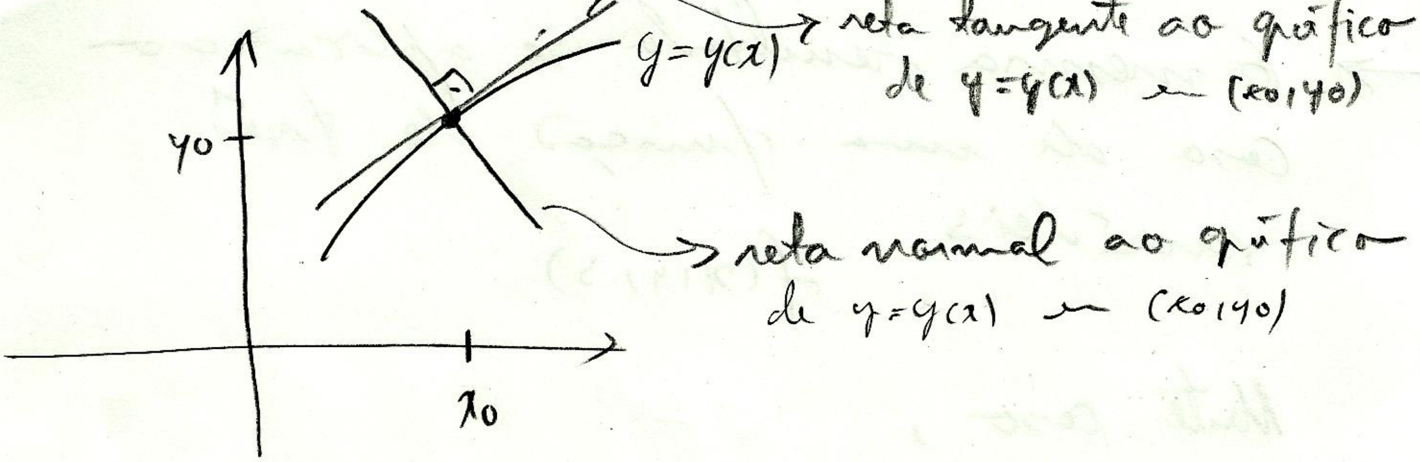
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) = \underbrace{\frac{\partial c}{\partial x}}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}} = 0$$

$$\therefore \quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)} \cdot \left(1, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\nabla f \cdot \left(1, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (*)$$

Mas, sendo $y = y(x)$ imaginemos que no ponto (x_0, y_0) tenhamos o gráfico de $y = y(x)$ como mostrado na figura:



A reta tangente ao gráfico de $y = y(x)$ em (x_0, y_0) tem coeficiente angular

$$m \equiv \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Um vetor paralelo a reta tangente é então

(**) $\left(1, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}\right)$ (Porquê?)

De (*) e (**) vemos que <u>$(\nabla f)(x_0, y_0)$ é perpendicular a curva de nível ao gráfico da função e que passa pelo ponto (x_0, y_0)</u>.

→ O mesmo resultado se aplica ao caso de uma função de três variáveis

$f(x,y,z)$

Neste caso,

$$(\nabla f)(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \right)$$

é perpendicular a superfície de nível da gráfica da $f(x,y,z)$ que passa pelo ponto (x_0,y_0,z_0).

Este resultado serve para exibirmos o vetor normal a uma superfície

$\phi(x,y,z) = 0$.

Ex. Seja $\begin{cases} f(x,y) = 6 - 3x^2 - y^2 \\ \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$

Calcule $(D_{\vec{u}} f)(1,2)$

Solução

$$(D_{\vec{u}} f)(1,2) = (\nabla f)(1,2) \cdot \vec{u}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-6x, -2y)$$

$$\therefore (\nabla f)(1,2) = (-6 \cdot 1, -2 \cdot 2) = (-6, -4)$$

Daí,

$$(D_{\vec{u}} f)(1,2) = (-6,-4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Ex: Seja $\begin{cases} f(x,y) = xy^2 \\ \vec{u} = (1,-2) \end{cases}$

Calcule a derivada direcional de f no ponto (1,3) ao longo do vetor $\vec{u}$.

Solução

Vemos que $\vec{u} = (1,-2)$ não é vetor unitário, logo devemos redefini-lo de modo a ter norma 1, i.e.

$$\vec{u} \longrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

↳ vetor unitário

Mas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \therefore \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(-3,1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad \therefore \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(-3,1) = 2(-3)\cdot 1 = -6$$

Daí

$$(D_{\vec{u}'} f)(-3,1) = \underbrace{(\nabla f)(-3,1)} \cdot \vec{u}'$$

$$= (1,-6) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$