Máximo e Mínimo de Funções de Várias Variáveis

1. Extremos de uma função

• **Def: Máximo Absoluto, mínimo absoluto**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função

(i) Dizemos que f assume um *máximo absoluto* (ou simplesmente um *máximo*) em $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \;\; \forall (x,y) \in D$$

O valor numérico $f(x_0, y_0)$ é dito o *máximo absoluto* (ou simplesmente o *máximo*) da f.

(ii) Dizemos que f assume um *mínimo absoluto* (ou simplesmente um *mínimo*) em $(x_0, y_0) \in D$ se

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \;\; \forall (x,y) \in D$$

O valor numérico $f(x_0, y_0)$ é dito o *mínimo absoluto* (ou simplesmente o *mínimo*) da f.

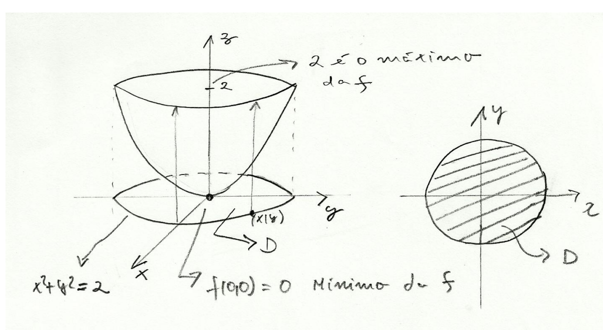
• **Ex:** Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 2$.

Aqui temos o domínio da f dado pela relação $x^2 + y^2 \leq 2$, i.e. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.
Por inspeção temos que $0 \leq f(x,y) \leq 2$, assim

$\lrcorner$ 0 é mínimo de f pois $0 \leq f(x,y), \;\; \forall (x,y) \in D$

$\lrcorner$ 2 é máximo de f pois $f(x,y) \leq 2, \;\; \forall (x,y) \in D$

e, em particular, vemos que
f assume seu valor mínimo, 0, no ponto $(0,0)$
f assume seu valor máximo, 2, em pontos do círculo centrado na origem e com raio $\sqrt{2}$.



• **Def.: Máximo local, mínimo local**

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$

(i) Dizemos que f assume um *máximo local* em $(x_0, y_0) \in D$ se existe um disco aberto $D_\delta(x_0, y_0) \subset D$ tal que se tem

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \;\; \forall (x,y) \in D_\delta(x_0, y_0) \tag{1}$$

O valor numérico $f(x_0, y_0)$ é dito o *máximo local* da f.

(ii) Dizemos que f assume um *mínimo local* em $(x_0, y_0) \in D$ se existe um disco aberto $D_\delta(x_0, y_0) \subset D$ tal que se tem

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D_\delta(x_0, y_0) \tag{2}$$

O valor numérico $f(x_0, y_0)$ é dito o *mínimo local* da f.

Obs: O disco aberto de raio $\delta > 0$ e centro (x_0, y_0) é o conjunto
$D_\delta(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \delta^2\}$

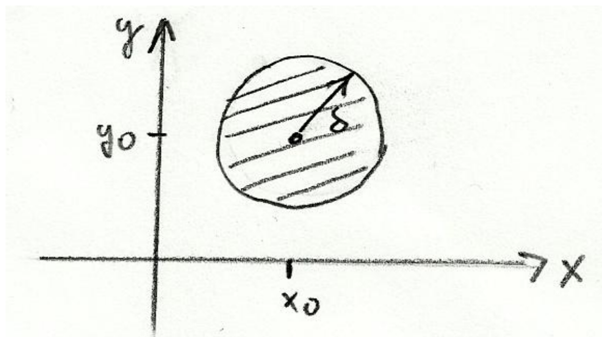


Figura 1: $D_\delta(x_0, y_0)$

Obs: Por extremo local de uma função designamos tanto um mínimo local quanto um máximo local da função.

2. Determinação dos extremos locais de uma função

• **Questão:** Dado $f(x, y)$ como achar os extremos locais da f?

• **Res:** [Critério (necessário mas não suficiente) para se ter um extremo local de uma função]
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$.
Os possíveis candidatos a extremos locais da f, caso existam, são obtidos a partir de uma das duas condições a seguir

$$(i) \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$(ii) \begin{cases} f_x \ \text{ não existe} \\ \qquad \text{OU} \\ f_y \ \text{ não existe} \end{cases} \tag{4}$$

Os pontos obtidos das condições (i) e (ii) são ditos *pontos críticos* da f.

Obs: Os pontos que se obtem das condições acima não são necessariamente extremos locais da f.

• **Res:** [Critério para identificar quais dos pontos críticos são extremos locais da função]

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Seja (x_0, y_0) ponto crítico da f oriundo da condição (i) dada na equação (3) (i.e. $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$)
Considere a quantidade (dita a Hessiana de f)

$$\begin{aligned} H(x_0, y_0) \quad &:= \quad \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \quad f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \end{aligned}$$

Temos
(i) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (ou $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) então f tem um mínimo local em (x_0, y_0).
(ii) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (ou $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) então f tem um máximo local em (x_0, y_0).
(iii) Se $H(x_0, y_0) < 0$ diz-se que (x_0, y_0) é um *ponto de sela* de f (Ver observação a seguir)
(iv) Se $H(x_0, y_0) = 0$ então nada se pode afirmar sobre (x_0, y_0) ser ou não um extremo local da f e, neste caso, devemos usar diretamente a definição (1), (2).

Obs: (1) O critério acima só se aplica se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f obtido a partir da condição (i) dada pela equação (3).

(2) Se (x_0, y_0) for ponto crítico oriundo da condição (ii) dada em (4) então a identificação dele como extremo local da f deverá ser feito usando a definição (1), (2).

Obs: Ponto de Sela
Um ponto de sela de $f(x, y)$ é um ponto crítico (x_0, y_0) da função tal que se tem
(i) $f_x(x_0, y_0) = 0, \;\; f_y(x_0, y_0) = 0$
(ii) Existe um disco $D_\delta(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y)$ assume um valor máximo em (x_0, y_0) quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ por um certo diâmetro do disco $D_\delta(x_0, y_0)$, e $f(x, y)$ assume um valor mínimo quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ indo por um outro diâmetro do disco $D_\delta(x_0, y_0)$.

• **Exemplo:** Ache os pontos críticos de $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$ e verifique se eles são extremos locais da f.
<u>Solução</u>.
⌟ Temos

$$\begin{cases} f_x = -2x + 2 \\ f_y = -2y - 4 \end{cases}$$

⌟ <u>Obtenção dos pontos críticos da função</u>
Análise da condição (3):

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ -2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

i.e. $(1, -2)$ é ponto crítico da f.

Análise da condição (4):
Aqui, vemos que as derivadas parciais f_x, f_y estão definidas para todos os pontos do domínio da função, assim, a condição (4) não gera nenhum ponto crítico adicional.

$\lrcorner$ Identificando a natureza do ponto crítico

O ponto crítico da f, $(1,-2)$, saiu unicamente da condição dada por (3). Como este ponto crítico foi obtido da condição de derivada parcial ser nula nós podemos usar a Hessiana para analisar se $(1,-2)$ é extremo local ou não da f. Temos

$$H(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$$

$\therefore\ H(1,-2) = 4 > 0,\ f_{xx}(1,-2) = -2 < 0$. Daí, temos que $(1,-2)$ é ponto onde f assume um máximo local, neste caso $f(1,-2) = 8$.

Obs: No caso da função dada, $f(x,y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$, poderíamos chegar a mesma conclusão notando que completando os quadrados $f(x,y)$ se escreve como

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y \\
&= -(x^2 - 2x) - (y^2 + 4y) + 3 \\
&= -(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 4y + 4 - 4) + 3 \\
&= -\big((x-1)^2 - 1\big) - \big((y+2)^2 - 4\big) + 3 \\
&= -(x-1)^2 + 1 - (y+2)^2 + 4 + 3 \\
&= -(x-1)^2 - (y+2)^2 + 8 \quad (*)
\end{aligned}$$

e de $(*)$ vemos que $f(x,y) \leq 8$, i.e. 8 é o máximo local de f que ocorre quando $(x,y) = (1,-2)$.

• **Exemplo:** Ache os pontos críticos de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e verifique se eles são extremos locais da f.

Solução.

Temos

$$\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{5}$$

$\lrcorner$ Obtenção dos pontos críticos da função

Análise da condição (3):

$$\begin{cases} f_x = 0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x = 0,\ y \neq 0 \\ f_y = 0 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow y = 0,\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \nexists (x,y) \text{ tal que tenhamos simultaneamente verificado} \\ f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0 \end{array}$$

Assim, não obtemos nenhum ponto crítico da condição de termos simultaneamente nulas as derivadas parciais f_x e f_y

Análise da condição (4):

De (5) vemos que as derivadas parciais f_x, f_y, não existem no ponto $(x, y) = (0, 0)$, i.e. $(0, 0)$ é o único ponto crítico da função.

$\lrcorner$ Identificando a natureza do ponto crítico

Note que este ponto crítico $(0, 0)$ foi obtido da condição da **não existência** da derivada parcial, logo, **não** podemos usar o teste da matriz hessiana $H(x, y)$ para identificar a natureza do ponto crítico. Devemos então usar a definição (1), (2).

Notamos que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ e, em particular, no ponto crítico $(0, 0)$ temos $f(0, 0) = 0$, logo, $(0, 0)$ é ponto de mínimo local (e global - Porque?) da função, sendo $0(= f(0, 0))$ o mínimo local (e global) da função.

• **Exemplo:** Ache os pontos críticos de $f(x, y) = y^2 - x^2$ e verifique se eles são extremos locais da f.

Temos

$$\begin{cases} f_x = -2x \\ f_y = 2y \end{cases} \tag{6}$$

$\lrcorner$ Obtenção dos pontos críticos da função

Análise da condição (3):

$$\begin{cases} f_x = 0 = -2x \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 0 = 2y \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto crítico da } f$$

Análise da condição (4):

Vemos de (6) que as derivadas parciais f_x, f_y estão definidas para todos os pontos do domínio da função, assim, a condição (4) não gera nenhum ponto crítico adicional.

$\lrcorner$ Identificando a natureza do ponto crítico Podemos usar o critério da matriz Hessiana para analisar a natureza do ponto crítico $(0, 0)$. Temos

$$\begin{aligned} & H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \therefore \quad & H(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \therefore \quad & \det H(0, 0) = -4 < 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto de sela.} \end{aligned}$$

• **Exemplo:** Ache os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ e verifique se eles são extremos locais da f.

Temos

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y \\ f_y = -2x + y^2 - 3 \end{cases} \tag{7}$$

$\lrcorner$ Obtenção dos pontos críticos da função

Análise da condição (3):

$$\begin{cases} f_x = 0 = 2x - 2y \Rightarrow x = y \;\; (*) \\ f_y = 0 = -2x + y^2 - 3 \Rightarrow y^2 = 3 + 2x \therefore y = \pm\sqrt{3 + 2x} \;\; (**) \end{cases}$$

De $(*)$ e $(**)$ temos

$$x = \pm\sqrt{3+2x} \;\therefore\; x^2 = 3+2x \;\therefore\; x^2-2x-3=0 \;\therefore\; x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \;\therefore\; x=3 \text{ ou } x=-1$$

Temos então por pontos críticos da f os pontos $(-1,-1)$ e $(3,3)$.

Análise da condição (4):
Vemos de (7) que as derivadas parciais f_x, f_y estão definidas para todos os pontos do domínio da função, assim, a condição (4) não gera nenhum ponto crítico adicional.

$\lrcorner$ Identificando a natureza dos pontos críticos
Uma vez que os pontos críticos foram obtidos pela condição (3), de anular as derivas parciais, podemos usar o critério da matriz Hessiana para analisar a natureza dos pontos críticos obtidos. Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \det H(x,y) = 4y-4$$

$$\therefore \quad \det H(-1,-1) = -8 < 0 \Rightarrow (-1,-1) \text{ é ponto de sela da função.}$$

$$\therefore \quad \det H(3,3) = 8 > 0 \text{ e } f_{xx}(3,3) = 2 > 0 \;\therefore\; f \text{ assume um mínimo local em } (3,3)$$

$$\therefore\; f(3,3) = -9 \text{ é mínimo local da } f.$$

3. Determinação dos extremos absolutos de uma função sujeito a uma condição: Método dos Multiplicadores de Lagrange

• **Problema:** Seja $f(x,y) = x^2+4y^3$. Encontre os extremos da função f para pontos (x,y) na elipse $x^2+2y^2=1$.

Inicialmente, note que este problema é diferente dos problemas anteriores pelo fato de que não estamos procurando extremos considerando todo o domínio da função, mas sim apenas os extremos da função $f(x,y)$, caso existam, quando se limita (x,y) a satisfazer a condição dada, neste caso, a curva $x^2+2y^2=1$ que corresponde geometricamente a uma elipse.
Não quer dizer com isso que, caso haja extremo da função $f(x,y)$ com (x,y) sujeito a condição $x^2+2y^2=1$, este seja um ponto de extremo da função em relação ao seu domínio original (i.e. sem considerar a condição $x^2+2y^2=1$)

Há dois métodos que podem ser utilizados na solução deste problema.

1º método: Por substituição direta
A condição dada é $x^2+2y^2=1$, e permite escrever $x^2 = 1-2y^2$ que pode ser substituído diretamente na função $f(x,y) = x^2+4y^3$ (em alguns casos, pode ser que tenhamos que susbtituir y ao invés de x na expressão de $f(x,y)$), o que nos permite então ver $f(x,y)$ como uma nova

função

$$h(y) \equiv f(x,y)\big|_{x^2=1-2y^2} = 1 - 2y^2 + 4y^3 \tag{8}$$
$$\text{com} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Note que a condição $x^2 + 2y^2 = 1$ nos dá uma variação de y no intervalo $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ conforme nos mostra a figura

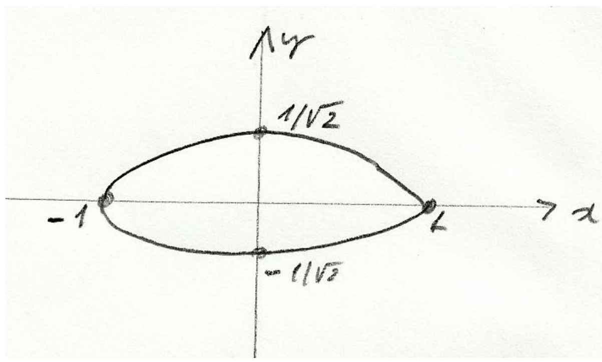


Figura 2:

Vemos então que o problema de determinar os extremos da função f sujeita a condição $x^2+2y^2 = 1$ é equivalente ao problema de se encontrar os extremos da função $h(y) = 1 - 2y^2 + 4y^3$ com $y \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Lembramos que no cálculo de funções de uma variável, o teorema do valor extremo no diz que: Se $w : I \to R$ é contínua e I é intervalo fechado, então w tem máximo e mínimo absoluto em I. Este é o caso da função h dada em (8).

Assim, para determinar os extremos globais da função h no intervalo $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ devemos analisar os candidatos a extremos que estão no interior do intervalo, i.e. em $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e que correspondem aos pontos críticos da h, e depois o valor de h nos extremos do intervalo, i.e. nos valores $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Assim,

$$h'(y) = -4y + 12y^2 = -4y(1-3y)$$
$$\therefore h'(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{3}$$

e temos por candidatos a extremos da $f(x,y)$ os pontos

$$\begin{aligned}
y = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\pm 1, 0) \\
y = \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad \Big(\pm\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3}\Big) \\
y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\Rightarrow \quad \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \\
y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\Rightarrow \quad \Big(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)
\end{aligned}$$

Resta agora calcular f em cada um desses pontos e por inspeçaõ verificar o maior e menor valor assumido:

$$\begin{aligned}
f(1,0) &= 1 \\
f(-1,0) &= 1 \\
f(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{25}{47} < 1 \\
f(\frac{-\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3}) &= \frac{25}{47} < 1 \\
f(0,\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \sqrt{2} \\
f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}) &= -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$\therefore f(0,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ é o máximo da f sujeito a condição $x^2+2y^2=1$
$f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$ é o mínimo da f sujeito a condição $x^2+2y^2=1$.

<u>$2^{\underline{\text{O}}}$ método</u>: Método dos multiplicadores de Lagrange
No método dos multiplicadores de Lagrange, ao invés de usarmos a relação dada, $x^2+2y^2=1$, para eliminar uma variável na expressão de $f(x,y)$, adotamos o seguinte procedimento.
(i) Escreve-se a relação dada sobre x, y na forma de uma função de duas variáveis $\phi(x,y)$, e.g. $x^2+2y^2=1 \to \phi(x,y)=x^2+2y^2-1$. Introduz-se então um parâmetro arbitrário λ, dito o *multiplicador de Lagrange*, e considera-se as equações

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lambda\phi_x(x,y) \\
f_y(x,y) &= \lambda\phi_y(x,y) \\
\phi(x,y) &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

A solução de (9) determina os candidatos a extremos da f sujeito a condição dada. Novamente, por inspeção se identifica quais destes valores são máximo e mínimo absoluto da função f.
Assim, para o exemplo considerado temos a equação (9) na forma

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)=\lambda\phi_x(x,y) &\Rightarrow \quad 2x=\lambda 2x \quad \Rightarrow \quad x(1-\lambda)=0\ (*) \\
f_y(x,y)=\lambda\phi_y(x,y) &\Rightarrow \quad 12y^2=\lambda 4y \quad \Rightarrow \quad y(3y-\lambda)=0\ (2*) \\
\phi(x,y)=0 &\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad x^2+2y^2=1\ (3*)
\end{aligned}$$

De $(*)$: $x(1-\lambda)=0 \Rightarrow x=0$ ou $\lambda=1$
$\lrcorner$ Suponha $x=0$. Substituindo em $(3*)$ temos $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, o que nos dá o ponto $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.
$\lrcorner$ Suponha $\lambda=1$. Susbtituindo em $(2*)$ temos $y(3y-1)=0 \Rightarrow y=0$ ou $y=\frac{1}{3}$.
Se $y=0$ temos de $(3*)$ que $x^2=1 \therefore x=\pm1$, o que nos dá o ponto $(\pm1,0)$.
Se $y=\frac{1}{3}$ temos de $(3*)$ que $x^2=\frac{7}{9} \therefore x=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$, o que nos dá o ponto $(\pm\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$. Temos então

por inspeção que

$$
\begin{aligned}
f\Big(0\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= \sqrt{2} \\
f\Big(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= -\sqrt{2} \\
f(1,0) &= 1 \\
f(-1,0) &= 1 \\
f\Big(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3}\Big) &= \frac{25}{27} \\
f\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3}\Big) &= \frac{25}{27}
\end{aligned}
$$

d'onde se conclui que
$f(0,\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ é máximo da função sujeita a condição $x^2+2y^2=1$
$f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ é mínimo da função sujeita a condição $x^2+2y^2=1$,
que coincide com a mesma resposta obtida usando o primeiro método, como tinha de ser.

4. Máximo e mínimo absoluto de uma função

• Def: Região compacta em $\mathbb{R}^2$

Seja D uma região do plano $\mathbb{R}^2$ delimitada por uma curva, que constitui a fronteira da região. Dizemos $D \subset \mathbb{R}^2$ é *compacta* se

(i) D é *limitada*, i.e. se D está contida em algum retângulo do plano $\mathbb{R}^2$.

(ii) D é *fechada*, i.e. se D contêm a curva que a delimita.

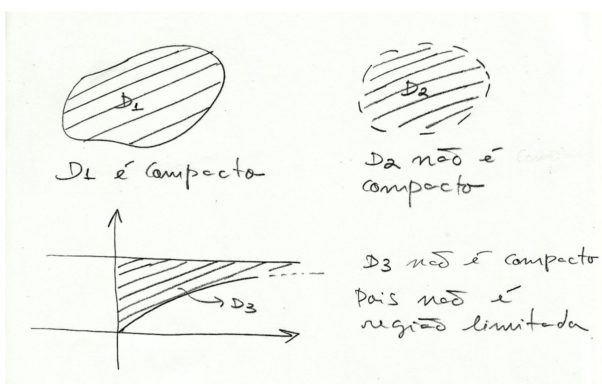


Figura 3:

• Res: Teorema do Máximo e Mínimo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ contínua e com domínio D compacto. Então, f assume um máximo global e um mínimo global em D.

Obs: Sendo a região D compacta, ela inclui a sua fronteira. Há, pois, duas possíveis localizações dos pontos onde f assume os extremos globais que são:

$\lrcorner$ O(s) extremo(s) pode(m) estar situado(s) (ambos, apenas um, ou nenhum) no interior da região, neste caso, é um ponto crítico, sendo obtido das condições (3) e/ou (4).
$\lrcorner$ O(s) extremo(s) pode(m) estar localizado(s) na fronteira. Neste caso, para obte-lo(s), usa-se a condição que define a fronteira da região, ou para eliminar uma das variáveis [1], ou como um vínculo no tratamento dos multiplicadores de Lagrange.
Note que um ponto onde f assume extremo local, e.g. (x_0, y_0), deve ser tal que existe um disco $D_\delta(x_0, y_0) \subset D$, assim, extremos locais, caso existam, estão necesariamente localizados no interior da região D.

• **Exemplo:** Encontre os extremos de $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$ com $x^2 + y^2 \leq 16$.
Solução. A função f está definida em um disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$ que é uma região compacta. Do teorema do valor extremo temos que f admite um máximo e mínimo absoluto em D.
Localização dos extremos.
Da observação anterior temos que os cadidatos a extremos da f definida no compacto D podem estar no interior da região (i.e. pontos (x, y) tal que $x^2 + y^2 < 16$) ou na sua fronteira (i.e. pontos (x, y) tal que se tem $x^2 + y^2 = 16$).
$\lrcorner$ *Pontos no interior de D*: os candidatos são pontos críticos da f.

$$\begin{aligned} f_x &= 6x \\ f_y &= 4y - 4 \end{aligned}$$

Vemos que as derivadas parciais estão definidas em todos os pontos de D, assim, os pontos críticos da f são oriundos apenas da condição (3), que nesta caso nos dá

$$\begin{aligned} f_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \\ f_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(0, 1)$ é ponto crítico da f.

$\lrcorner$ *Pontos na borda de D*: usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange. Aqui, a condição que existe entre x, y é a condição que define a borda da região, i.e. $x^2 + y^2 = 16$, que reescrevemos como $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 16$. Assim, consideramos

$$\begin{aligned} f_x = \lambda\phi_x \quad &\rightarrow \quad 6x = \lambda 2x \ (*) \\ f_y = \lambda\phi_y \quad &\rightarrow \quad 4y - 4 = \lambda 2y \ (2*) \\ \phi = 0 \quad &\rightarrow \quad x^2 + y^2 - 16 = 0 \ (3*) \end{aligned}$$

Daí, de $(*)$: $6x - 2\lambda x = 0 \therefore 2x(3 - \lambda) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = 3$.
Seja $x = 0$. Substituindo em $(3*)$ temos $y = \pm 4$, o que nos dá os pontos $(0, \pm 4)$.
Seja $\lambda = 3$. De $(2*)$ temos $4y - 4 = 6y \therefore y = -2$. Substituindo este valor em $(3*)$ temos

[1] Neste caso, reduz-se o problema ao caso análogo do da determinação dos extremos de uma função de uma variável definida em um intervalo fechado.

$x^2 + 4 - 16 = 0 \therefore x = \pm\sqrt{12}$ o que nos dá os pontos $(\pm\sqrt{12}, -2)$.
Considerando então os pontos obtidos no inteiror e na borda da região temos então por inspeção

$$\begin{aligned} f(0,1) = &= -1 \\ f(0,4) &= 17 \\ f(0,-4) &= 49 \\ f(\sqrt{12},-2) &= 53 \\ f(-\sqrt{12},-2) &= 53 \end{aligned}$$

d'onde se conclui que
$f(0,1) = -1$ é o mínimo absoluto de f no disco D
$f(\pm\sqrt{12}, -2) = 53$ é o máximo absoluto da f no disco D.

Problemas de maximização e minimização envolvendo funções de várias variáveis

• **Exemplo:** Encontre três números positivos cuja soma é 48 e cujo produto seja máximo. Determine este produto.
Solução.
Queremos determinar três números positivos x, y, z tal que $x + y + z = 48$ e que tenha produto máximo. Temos aqui um problema de maximizar a função $f(x, y, z) = xyz$ sujeito a condição $\phi(x, y, z) = xyz - 48$.
Usando o método dos multiplicadores de Lagrange aplicado ao caso de uma função de três variáveis, temos

$$\begin{aligned} f_x = \lambda\phi_x &\rightarrow yz = \lambda\ (*) \\ f_y = \lambda\phi_y &\rightarrow xz = \lambda\ (2*) \\ f_z = \lambda\phi_z &\rightarrow xy = \lambda\ (3*) \\ \phi = 0 &\rightarrow xyz - 48 = 0\ (4*) \end{aligned}$$

De $(*)$ e $(2*)$ temos, $yz = xz \therefore y = x$ pois $z > 0$. De $(2*)$ e $(3*)$ $xz = xy \therefore z = y$ pois $x > 0$. Obtemos então que $x = y = z$. De $(4*)$ segue-se então que $3x = 48 \therefore x = 16$, i.e. $x = y = z = 16$.

Extremos de uma função

Determine os pontos críticos da função, e determine se ele é máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $\begin{cases} f_x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ $\therefore$ $(x,y) = (0,0)$ mas $(x,y) \neq (0,0)$ do contrário f_x e f_y não existiriam.

Isto é, não há ponto crítico oriundo da condição de derivada parcial nula.

ii) $f_x \nexists \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$f_y \nexists \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$\therefore$ $(0,0)$ é pto. crítico

Identificação do ponto crítico:

Não podemos usar a Hessiana.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Vemos que $\forall (x,y) \in B_\delta(0,0)$ temos

$f(0,0) = 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$

Logo

$\boxed{\begin{array}{l}(0,0) \text{ é ponto onde } f \text{ assume} \\ \text{mínimo local, com } f(0,0)=0 \\ \text{mínimo local de } f(0,0)=0\end{array}}$

---

2. $f(x,y) = x^2 - e^{y^2}$

$f_x = 2x \quad , \quad f_y = -2y\, e^{y^2}$

i) $f_x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_y = 0 \Rightarrow -2y e^{y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ $\quad \therefore (x,y) = (0,0)$

ii) $f_x \nexists$
$f_y \nexists$ $\Rightarrow$ não se aplica.

Identificando o ponto crítico:

2. Cont.

$$H(x,y) = \det \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 2 \\ f_{xy} = 0 = f_{yx} \\ f_{yy} = -2e^{y^2} - 4y^2 e^{y^2} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2e^{y^2} - 4y^2 e^{y^2} \end{vmatrix}$$

$$= -4e^{y^2} - 8y^2 e^{y^2}$$

Aqui,

$$H(0,0) = -4\underbrace{e^{0^2}}_{1} - \cancel{8.0^2 e^{0^2}}^{0}$$

$$= -4 < 0$$

$\therefore$ $\boxed{(0,0) \text{ é pt. de sela}}$

2

3. $\begin{cases} f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \\ \text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, y \neq 0\} \end{cases}$

$$f_x = -\frac{1}{x^2} + y$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} + x$$

*) $\begin{cases} f_x = 0 = -\frac{1}{x^2} + y \\ f_y = 0 = -\frac{1}{y^2} + x \end{cases}$

$$f_x = 0 = -\frac{1}{x^2} + y$$

$$0 = \frac{-1 + x^2 y}{x^2}$$

$x \neq 0$, $x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$ (*)

$$f_y = 0 = -\frac{1}{y^2} + x$$

$$0 = \frac{-1 + y^2 x}{y^2}$$

$y \neq 0$, $y^2 x = 1$ (**)

(*) $\to$ (**) : $y^2 x = 1$

$$\frac{1}{x^4} x = 1$$

$$\frac{1}{x^3} = 1$$

$x^3 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$

$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \underline{y = 1}$

3. Cont.

$(x,y)=(1,1)$ é pto. crítico

ii) $\begin{cases} f_x \nexists \\ f_y \nexists \end{cases}$

$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{x^2} + y \\ f_x \nexists \Rightarrow \quad x = 0 \;, y \text{ qualquer} \end{cases}$

$(x,y) = (0,y) \notin Dom\, f$

logo $(0,y)$ não é pto. crítico

$\begin{cases} f_y = -\frac{1}{y^2} + x \\ f_y \nexists \Rightarrow \quad y = 0 \;, x \text{ qualquer} \end{cases}$

Analogamente,

$(x,y) = (x,0) \notin Dom f$

logo $(x,0)$ não é pto. crítico da f.

Identificação do ponto crítico

Hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$f_{xx} = +\frac{2}{x^3}$$

$$f_{xy} = -\frac{1}{x^2} = f_{yx}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{y^3}$$

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & \frac{-1}{x^2} \\ \frac{-1}{x^2} & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{x^3y^3} - \frac{1}{x^4}$$

$$H(1,1) = 4 - 1 = 3 > 0$$

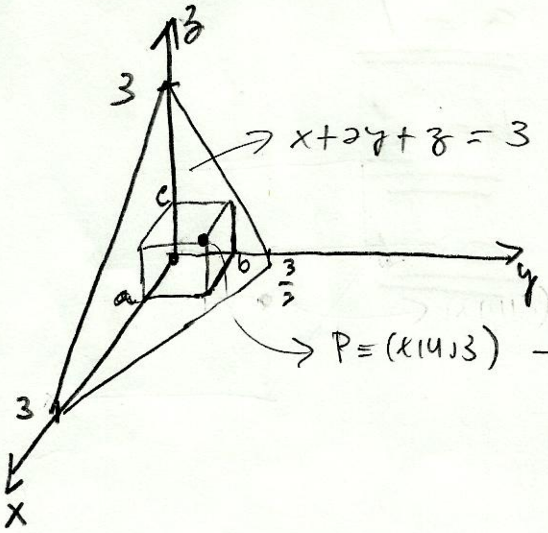
$\Rightarrow$

$\boxed{(1,1) \text{ é pto de mínimo local da } f}$

Máximo e Mínimo

1. Encontre as dimensões da caixa retangular de volume máximo que está no primeiro octante, tem um vértice na origem e o vértice oposto no plano $x+2y+z=3$.

Solução



$\rightarrow P=(x,y,z) \rightarrow$ pertence ao plano $x+2y+z=3$

Sejam a, b, c as dimensões da caixa. Então temos que maximizar a função

$$\begin{cases} V = abc \\ \text{sujeito a condição} \\ a+2b+c=3 \quad \Leftrightarrow \quad g(a,b,c) = a+2b+c-3 \end{cases}$$

Método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} V_a = \lambda g_a & \Leftrightarrow \quad bc = \lambda \quad ① \\ V_b = \lambda g_b & \Leftrightarrow \quad ac = 2\lambda \quad \therefore \quad \frac{ac}{2} = \lambda \quad ② \\ V_c = \lambda g_c & \Leftrightarrow \quad ab = \lambda \quad ③ \\ g(a,b,c) = 0 & \Leftrightarrow \quad a+2b+c-3=0 \quad ④ \end{cases}$$

$① = ② \Rightarrow b\cancel{c} = \frac{a\cancel{c}}{2} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow b = \frac{a}{2}$

$① = ③ \Rightarrow \cancel{b}c = a\cancel{b} \Rightarrow c = a \Rightarrow c = a$

Daí :

$④ \Rightarrow a + 2b + c - 3 = 0$

$a + \cancel{2}\frac{a}{\cancel{2}} + a - 3 = 0$

$3a = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

$\underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{c = 1}}$

Resposta : A caixa de Volume máximo tem dimensões $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$

2. Encontre os pontos da superfície $x^2 - yz = 1$ que estão mais próximos da origem.

Solução

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto da superfície.

Então tem-se, $x^2 - yz = 1$ (*).

A distância do ponto P até a origem é,

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Daí, devemos minimizar a função $d(x,y,z)$ sujeita a condição (*).

Ao invés de minimizarmos a função $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é mais conveniente trabalharmos com a função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Obviamente, um mínimo da $f(x,y,z)$ é um mínimo de $d(x,y,z)$ e vice-versa.

O problema se resume então a minimizarmos

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{com a condição} \\ g(x,y,z) = x^2 - yz - 1 \end{cases}$$

Metodo dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x & \to \cancel{2}x = \lambda \cancel{2}x & \Rightarrow x(1-\lambda) = 0 & ① \\ f_y = \lambda g_y & \to 2y = -\lambda z & \Rightarrow \lambda = -\frac{2y}{z} & ② \\ f_z = \lambda g_z & \to 2z = -\lambda y & \Rightarrow \lambda = \frac{-2z}{y} & ③ \\ g(x,y,z) = 0 & \to x^2 - yz - 1 = 0 & ④ & \end{cases}$$

① : $x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$ ou $\underline{\underline{\lambda=1}}$

② = ③ : $\frac{-2y}{z} = \frac{-2z}{y}$

$$\Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm z}} \quad ⑤$$

Seja $x = 0$ $\Rightarrow x^2 - yz - 1 = 0$

$$yz = -1$$

Se $y = +z$: $z^2 = -1 \Rightarrow \nexists\, z \in \mathbb{R}$

Então $y = -z$: $-z^2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{z = \pm 1}}$

Isto é temos por solução:

$$\underline{(x,y,z) = (0, \pm 1, \pm 1)}$$

• Se $\lambda = 1$: ② $\Rightarrow 1 = -\frac{2y}{z} \Rightarrow z = -2y$

③ $\Rightarrow 1 = \frac{-2z}{y} \Rightarrow y = -2z$ $\Rightarrow$

$z = -2y$
$y = -2z$ $\Rightarrow$ $z = -2(-2z) = 4z \rightarrow \underline{\underline{z=0}}$

$z = -2y \Rightarrow \underline{\underline{y=0}}$

Daí $x^2 - yz - 1 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}$

$\therefore \boxed{(\pm 1, 0, 0)}$

Temos de identificar entre esses pontos $(0, \pm 1, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0, 0)$ quais estão mais próximos da origem.

Temos

$d(0, \pm 1, \pm 1) = \sqrt{2}$

$d(\pm 1, 0, 0) = 1$

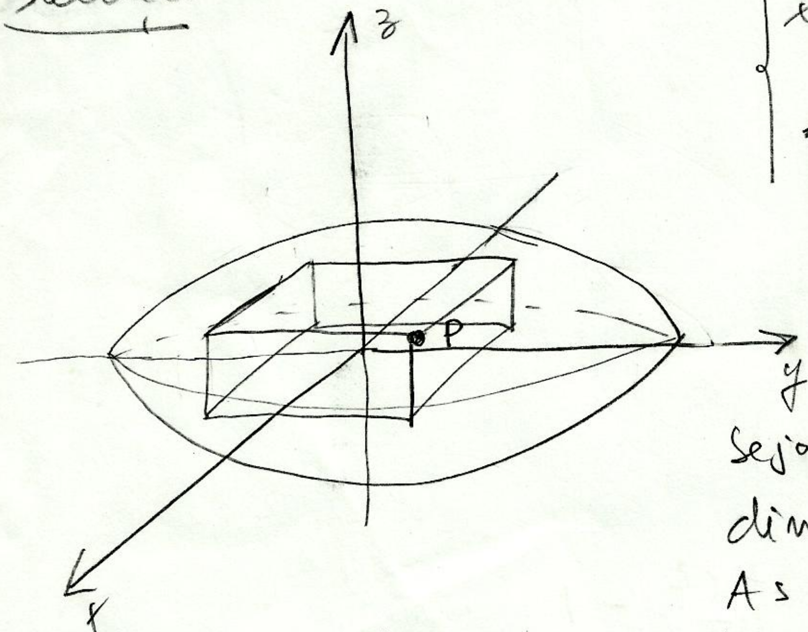
Logo,

$(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ são os pontos da superfície $x^2 - yz = 1$ que estão mais próximos da origem

Máximo e Mínimo de uma função
Multiplicadores de Lagrange

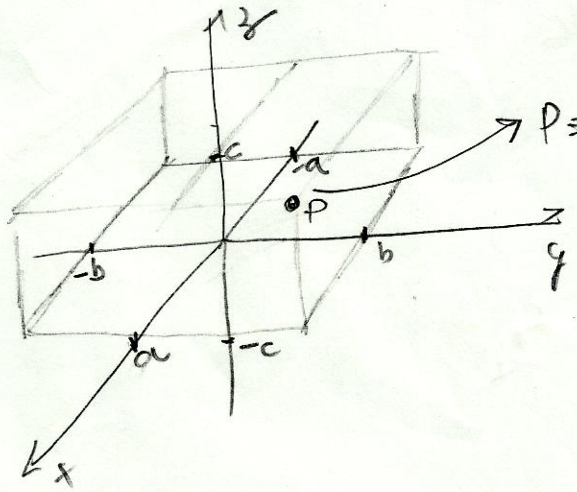
1. Encontre as dimensões de uma caixa retangular com faces paralelas aos planos coordenados e que seja inscrita no elipsóide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ e que tenha maior volume.

Solução



$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Sejam a, b, c as dimensões da caixa. As coordenadas do ponto P se escreve como:



$$P = (x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

P é ponto da elipse, logo satisfaz

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{\frac{a^2}{4}}{36} + \frac{\frac{b^2}{4}}{9} + \frac{\frac{c^2}{4}}{4} = 1$$

$$\frac{a^2}{144} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{16} = 1$$

O volume da caixa de lados a, b, c é

$V = abc$.

Temos então de maximizar $V(a,b,c)$ sujeito a condição

$$\frac{a^2}{144} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{16} = 1.$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} = \lambda \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial V}{\partial b} = \lambda \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial V}{\partial c} = \lambda \frac{\partial g}{\partial c} \\ g(a,b,c) = \frac{a^2}{144} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{16} - 1 \end{cases}$$

Aqui,

$$\begin{cases} bc = \lambda \frac{a}{72} & (1) \\ ac = \lambda \frac{b}{18} & (2) \\ ab = \lambda \frac{c}{8} & (3) \\ \frac{a^2}{144} + \frac{b^2}{36} + \frac{c^2}{16} = 1 & (4) \end{cases}$$

$$\lambda^2\left(\frac{1}{1679616}+\frac{2}{20736}\right)=1$$

$$\lambda^2\left(\frac{1}{1679616}+\frac{1}{10368}\right)=1$$

$/162$

$$\lambda^2\left(\frac{1+162}{1679616}\right)=1$$

$$\lambda^2\frac{163}{1679616}=1 \implies \lambda^2=\frac{1679616}{163}$$

$$\lambda=\frac{1296}{\sqrt{163}}$$

$$\implies a=\frac{1296}{\sqrt{163}}\frac{1}{108}=\underline{\underline{\frac{12}{\sqrt{163}}}}$$

$$b=\frac{1296}{\sqrt{163}}\frac{1}{24}=\underline{\underline{\frac{54}{\sqrt{163}}}}$$

$$c=\frac{1296}{\sqrt{163}}\frac{1}{36}=\underline{\underline{\frac{36}{\sqrt{163}}}}$$

$4\sqrt{3}$