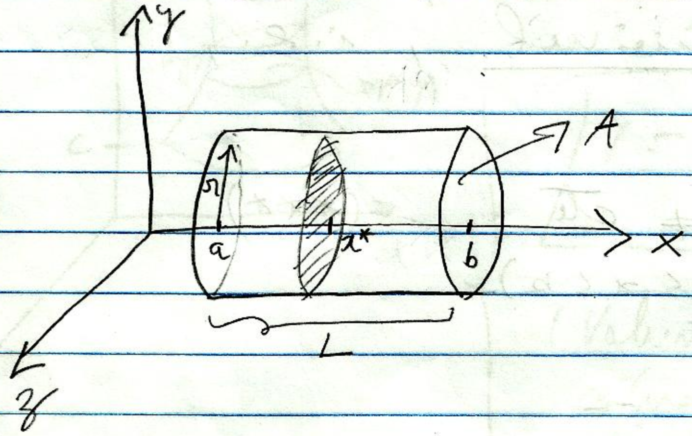
Volume de um sólido de revolução

• Ex.: Seja o cilindro mostrado abaixo com $A_{base} = \pi r^2$.



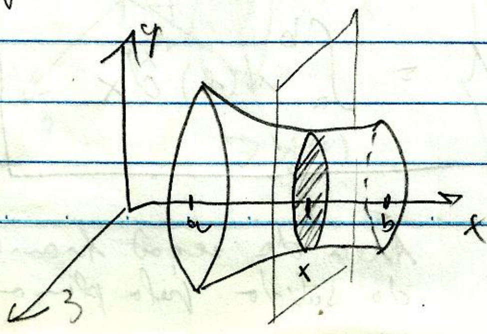
O volume do cilindro é dado por

$$\boxed{V = A_{base} \cdot L} \quad (*)$$

• Obs.: Cada plano $x = c$, $a \leq c \leq b$, define uma seção transversal do cilindro cuja área é

$$\boxed{A(x) = cte \doteq A_{base}} \quad (**)$$
$$(a \leq x \leq b)$$

• Seja agora o sólido abaixo:



Como obter o volume desse sólido?

Neste caso temos que:

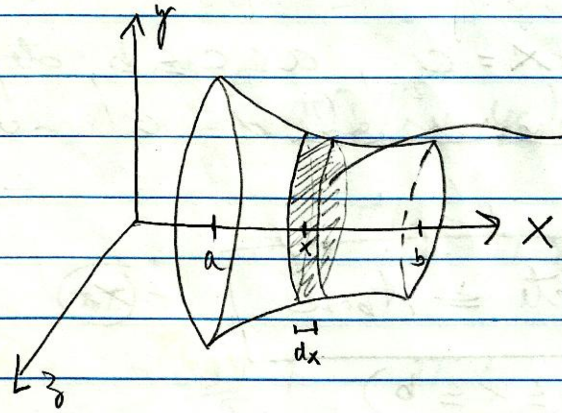
As seções transversais no sólido produzidas pelos planos $x = cte$, $a \leq x \leq b$ tem área variável, i.e., aqui temos

$$\begin{cases} A(x) \neq cte \\ (a \leq x \leq b) \end{cases} \quad (***)$$

A fim de obtermos uma expressão para o volume do sólido nós usaremos o seguinte procedimento:

Dividimos o sólido em pequenos cilindros com volume

$$dV = A(x)\,dx$$



$A(x)$: Área da seção transversal

Daí, aproximamos

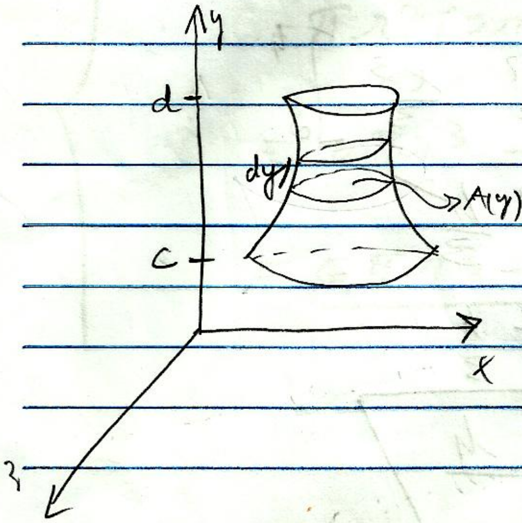
$$V = \int_a^b dV(x)$$

(Volume de um sólido situado entre os planos $x=a$ e $x=b$)

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx} \quad (1)$$

Área da seção transversal do sólido pelo plano $x = cte$, $a \leq x \leq b$.

Analogamente, para o sólido abaixo teríamos



$$dV = A(y)\,dy$$

$$\Leftrightarrow$$

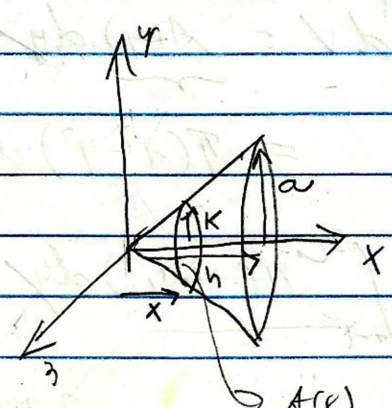
$$\boxed{V = \int_c^d A(y)\,dy} \quad (2)$$

(Volume de um sólido situado entre os planos $y = c$ e $y = d$)

<u>Ex.</u>: Encontre o volume do <u>cone</u> cuja base é um círculo de raio <u>a</u> e cuja altura é <u>h</u>.

<u>Solução</u>:

Consideremos o cone como mostrado abaixo



$$\frac{K}{x} = \frac{a}{h}$$

$$\therefore K = \frac{a}{h}x \quad \therefore$$

Temos

$$A(x) = \pi K^2 = \pi \frac{a^2}{h^2} x^2$$

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi a^2}{h^2} x^2\,dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2} \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

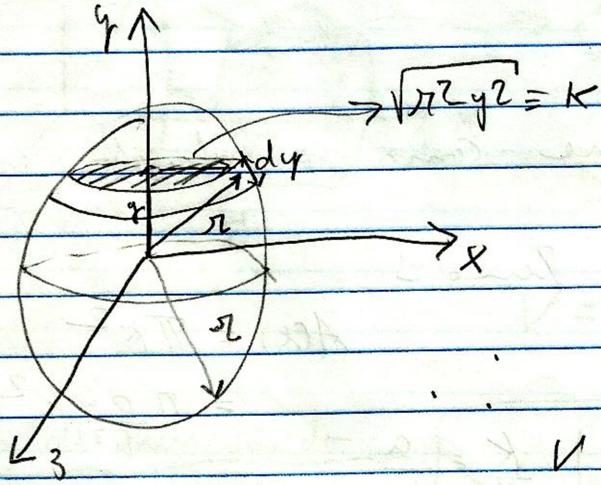
$$= \frac{\pi a^2}{\cancel{h^2}} \frac{h^{\cancel{3}}}{3}$$

$$= \pi a^2 \frac{h}{3}$$

$$\boxed{V_{cone} = \frac{A_{base}\, h}{3}}$$

Ex.: Mostre que o volume da esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Solução: Consideramos a esfera como mostrado abaixo:



Temos

$$dV = \underbrace{A(y)}\,dy$$

$$= \pi(r^2 - y^2)\,dy$$

$$\therefore V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - y^2)\,dy$$

$$= \pi r^2 y - \left.\frac{\pi y^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$V = \pi r^2 (r - (-r)) - \frac{\pi}{3}(r^3 - (-r)^3)$$

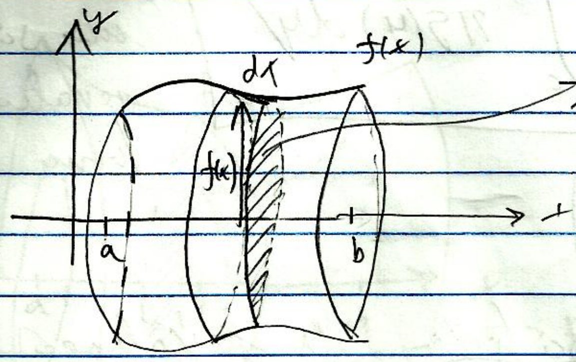
$$= \pi r^2 (2r) - \frac{\pi}{3}(2r^3)$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3$$

$$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Volume de um sólido de revolução

Ex. Seja o sólido R obtido pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ em torno do eixo x (com $f(x) \geq 0$)



$\rightarrow A(x) = \pi f(x)^2$

Aqui temos da expressão anterior (1):

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

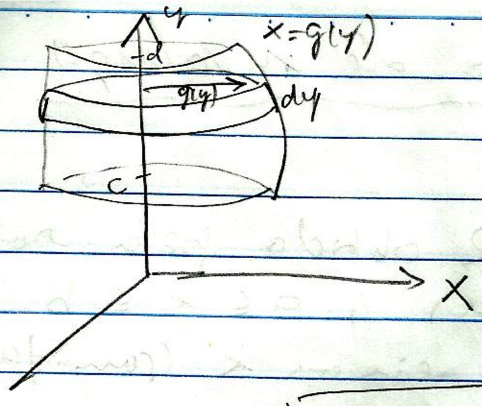
$\therefore$

(3) $$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx}$$ Volume de um sólido de revolução em torno do eixo x

- Analogamente, dada uma curva

$x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ $(g(y) \geq 0)$

ela gera um sólido pela rotação da curva em torno do eixo y,



$A(y) = \pi g^2(y)$

$\Leftarrow$

(4) $$\boxed{V = \int_c^d \pi g^2(y)\, dy}$$

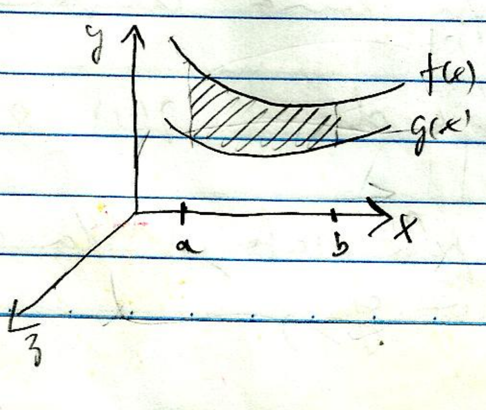
Volume de um sólido de revolução em torno do eixo y.

- **Volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana entre duas curvas**

Sejam $f(x)$ e $g(x)$, duas funções definidas em $[a,b]$ e tal que

$$f(x) > g(x) > 0 \;, \quad x \in [a,b]$$

Seja R o sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região plana situada entre $f(x)$ e $g(x)$:

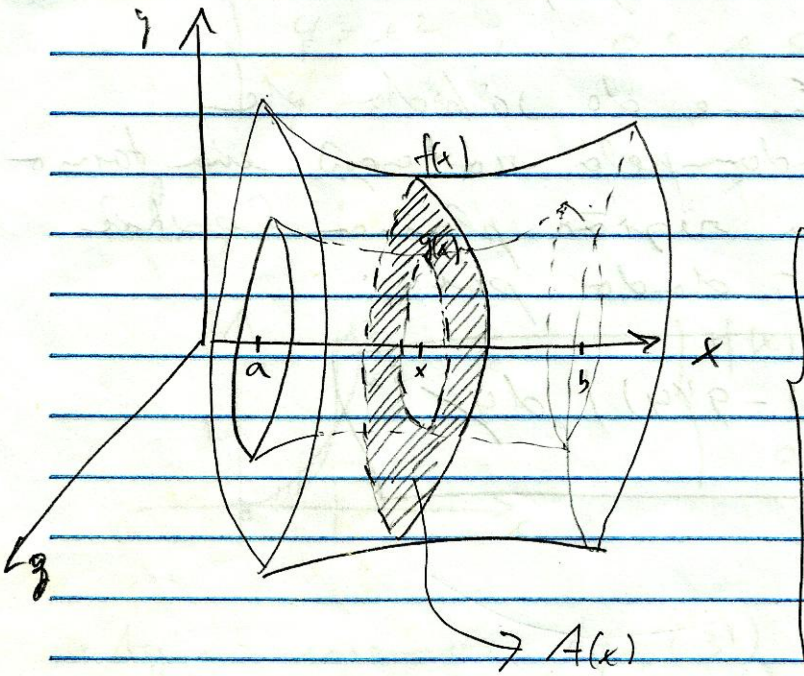


Aqui temos para o volume do sólido de revolução,

(3) $$\boxed{V = \int_a^b \pi \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx}$$

Volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x da região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$.

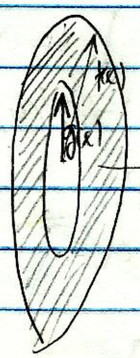
De fato



$$dV = A(x)\,dx = \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

$$\Leftarrow$$

$$V = \int_a^b \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$



$$\to A(x) = \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)$$

/ /

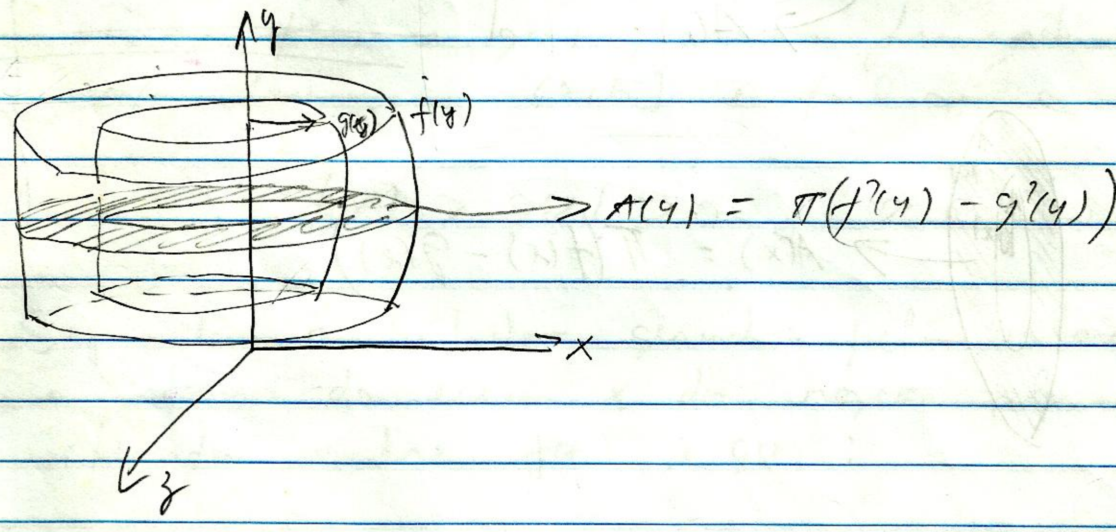
Analogamente,

Sejam $f(y)$ e $g(y)$ duas funções definidas em $[c,d]$ e tal que,

$$f(y) > g(y) > 0 \ , \ y \in [c,d]$$

então, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo y da região plana entre $f(y)$ e $g(y)$ é dado por:

(4') $$\boxed{V = \int_c^d \pi\left(f^2(y) - g^2(y)\right)\, dy}$$



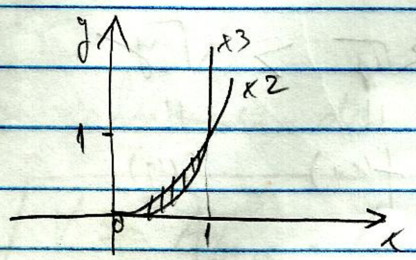
tilibra

Ex.

1) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas

$$\begin{cases} y = x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Solução:



$$\begin{cases} f(x) = x^2 \geq x^3 = g(x) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Aqui usamos eq. (3'):

$$V = \int_0^1 \pi \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \pi \left(x^4 - x^6 \right) dx$$

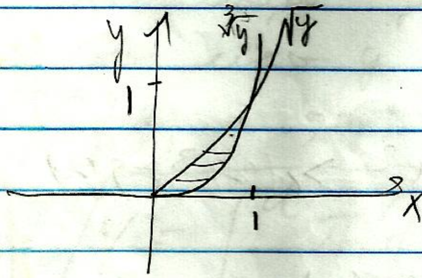
$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{2\pi}{35} \;//$$

2) Faça a mesma questão sendo agora uma rotação em torno do eixo y.

<u>Solução</u>:

$$\begin{cases} y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \\ y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y} \end{cases}$$



Vista como funções de y temos

$$\underset{f(y)}{\underset{\shortparallel}{\sqrt[3]{y}}} > \underset{g(y)}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{y}}}$$

Logo

$$V = \int_0^1 \pi \left(f^2(y) - g^2(y)\right)$$

$$= \int_0^1 \pi \left(y^{2/3} - y\right) dy$$

$$= \pi \frac{3}{5} y^{5/3} - \pi \frac{y^2}{2} \Big]_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{5} 1 - \pi \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6\pi - 5\pi}{10}$$

$$\boxed{V = \frac{\pi}{10}}$$