Cálculo B - ~~Prova de seleção a monitoria~~ Recuperação

1. Calcule $\int dx \, \frac{1}{1+\cos x}$

2. Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo x da curva $y = x^3$ com $1 \leq x \leq 2$.

3. Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. Seja $f(x,y) = x^{2/3}y^2$. Determine os pontos críticos da f e analise se eles são pontos de máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

5. Calcule o volume da região do espaço situada abaixo da superfície $z = 4(x^2+y^2)$, acima do plano $z = -2$ e limitada lateralmente pela superfície $y = x^2$ e o plano $y = x$.

Cálculo B - Recuperação

1. Calcule $\int dx \, \frac{1}{1+\cos x}$ <u>[1 ponto]</u>

2. Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo x da curva $y = x^3$, com $1 \leq x \leq 2$. [1 ponto]

3. Calcule $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ <u>[1 ponto]</u>

4. Seja $f(x,y) = x^{2/3} y^2$. Determine os pontos críticos da f e analise se eles são pontos de máximo local, mínimo local ou ponto de sela. <u>[2 pontos]</u>

5. Calcule o volume da região do espaço situada abaixo do paraboloide circular $z = 4(x^2+y^2)$, acima do plano $z = -2$ e limitada lateralmente pela superfície $y = x^2$ e o plano $y = x$. <u>[1 ponto]</u>

Cálculo B – Rec.

<u>Questão 1</u>:

$$\int dx \, \frac{1}{1+\cos x} = \int dx \, \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int dx \, \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \int dx \, \sec^2 \frac{x}{2}$$

0.5

Seja $u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2} dx \rightarrow dx = 2du$

$$(*) = \frac{1}{\cancel{2}} \int \cancel{2} du \, \sec^2 u$$

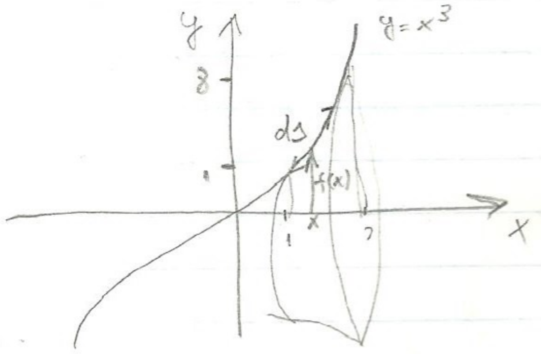
$$= \int du \, \sec^2 u$$

$$= tg\, u$$

$$= tg \frac{x}{2} + c$$

0.5

Questão 2



$$A = \int_1^2 2\pi f(x)\, ds(x) \quad (*)$$

ou

$$= \int_1^8 2\pi y\, ds(y) \quad (**)$$

Usando (*)

$$A = \int_1^2 2\pi\, x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad ; \quad (y = x^3) \quad 0.2$$

$$= \int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx \quad 0.4$$

$$= 2\pi \frac{1}{36} \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{3/2} \Big]_1^2$$

$$= \frac{\pi}{27} (1 + 9 \cdot 16)^{3/2} - \frac{\pi}{27} (1 + 9)^{3/2}$$

$$= \frac{\pi}{27} \left(145^{3/2} - 10^{3/2} \right) \quad 1.0$$

Usando (**) :

$$A = \int_1^8 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx(y)}{dy}\right)^2}\, dy \quad ; \quad \left(x(y) = \sqrt[3]{y}\right)$$

$$= \int_1^8 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3y^{2/3}}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^8 2\pi y \sqrt{1 + \frac{1}{9y^{4/3}}}\, dy$$

$$= \int_1^8 2\pi y \frac{\sqrt{9y^{4/3}+1}}{3y^{2/3}}\, dy$$

$$= \int_1^8 \frac{2\pi}{3} y^{1/3} \sqrt{1+9y^{4/3}}\, dy$$

$$= \cancel{\frac{2\pi}{3}} \left(1+9y^{4/3}\right)^{3/2} \cancel{\frac{2}{3}} \frac{1}{9} \cancel{\frac{3}{4}} \Big]_1^8$$

$$= \frac{\pi}{27} \left(1+9y^{4/3}\right)^{3/2} \Big]_1^8$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(1+9\cdot 2^4\right)^{3/2} - \frac{\pi}{27}(1+9)^{3/2}$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(1+9\cdot 16\right)^{3/2} - \frac{\pi}{27}(10)^{3/2}$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(145^{3/2} - 10^{3/2}\right) //$$

Question 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

(i) $x \to 0^+,\ y \to 0^+$:

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2y^2}+\frac{y^2}{x^2y^2}}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}^{\infty}+\frac{1}{x^2}^{\infty}}}$$

$$= 0$$

ii) $x \to 0^+,\ y \to 0^-$

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^-)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^-)} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^-)} \frac{1}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2y^2}+\frac{y^2}{x^2y^2}}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^-)} -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}^{\infty}+\frac{1}{x^2}^{\infty}}}$$

$$= 0$$

Questão 3: Cont

Analogamente tem-se que

iii) $x \to 0^-,\ y \to 0^+$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0^-,0^+)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

iv) $x \to 0^-,\ y \to 0^-$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0^-,0^-)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Logo,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0}$$

Questão 4

$f(x,y) = x^{2/3} y^2$

$$\begin{cases} f_x = \frac{2}{3} x^{-1/3} y^2 \\ f_y = 2x^{2/3} y \end{cases}$$ 0,2

Pontos críticos

i) $f_x = 0$, $f_y = 0$ ou ii) $f_x \nexists$, $f_y \nexists$

i) $f_x = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} x^{-1/3} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, \; x \neq 0$.

$f_y = 0 \Rightarrow 2x^{2/3} y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ $(x,0)$, $x \neq 0$ é pto. crítico

0.4

ii) $f_x \nexists \Rightarrow (x,y) = (0,y)$, y é qualquer

0.4

Análise dos pontos críticos [1.0]

→ $(x,0)$, $x \neq 0$

Seja $(a,0)$.

Temos, $\forall (x,y) \in B_\delta(a,0)$,

$$f(a,0) = 0 \leq f(x,y) = x^{2/3}y^2$$

$\therefore$ $(a,0)$ $(a \neq 0)$ é pto. mínimo local de f

Outra análise via Hessiana: (Não é conclusiva)

$$\begin{cases} f_{xx} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}y^2 \\ f_{xy} = \frac{4}{3}x^{-1/3}y \\ f_{yy} = 2x^{2/3} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \det \begin{vmatrix} -\frac{2}{9}x^{-4/3}y^2 & \frac{4}{3}x^{-1/3}y \\ \frac{4}{3}x^{-1/3}y & 2x^{2/3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{9}x^{-2/3}y^2 - \frac{16}{9}x^{-2/3}y^2$$

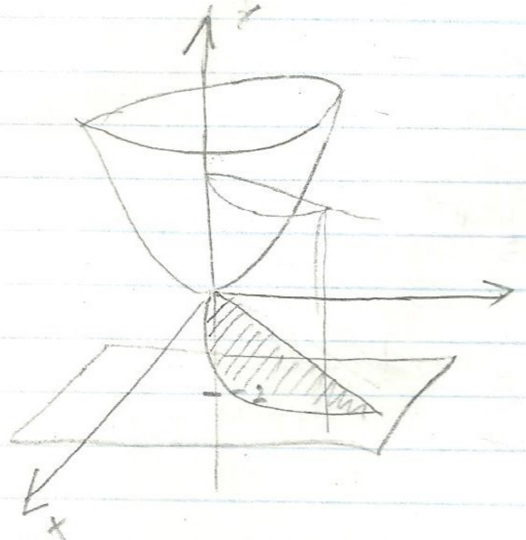
$H(a,0) = 0$ → nada se pode concluir.

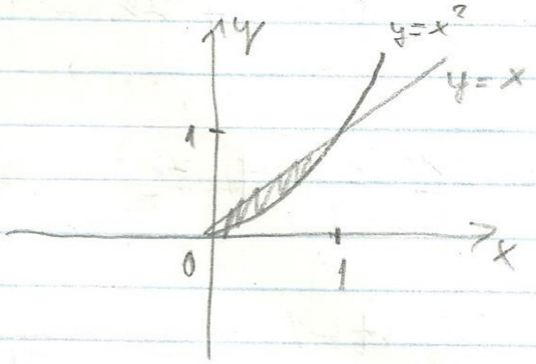
$\to (0,b)$: $\forall (x,y) \in B_\delta(0,b)$ temos
$b \in \mathbb{R}$

$$f(0,b) = 0 \leq f(x,y) = x^{2/3} y^2$$

Logo $\underline{(0,b) \text{ é ponto de mínimo local de } f}$

Questão 5





$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \leq 4(x^2+y^2),\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x \right\}$$

$$V = \int_\Omega dV = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{-2}^{4(x^2+y^2)} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \; z \Big]_{-2}^{4(x^2+y^2)}$$

0.5

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \left[4(x^2+y^2) - (-2) \right]$$

$$= \int_0^1 dx \left(4x^2y + \frac{4y^3}{3} + 2y \right)_{x^2}^{x}$$

$$= \int_0^1 dx \left[4x^2x + \frac{4}{3}x^3 + 2x - \left(4x^2x^2 + \frac{4}{3}x^6 + 2x^2\right) \right]$$

$$= \int_0^1 dx \left(4x^3 + \frac{4}{3}x^3 + 2x - 4x^4 - \frac{4}{3}x^6 - 2x^2 \right)$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{16x^3}{3} + 2x - 4x^4 - \frac{4}{3}x^6 - 2x^2 \right)$$

$$= \frac{16}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^5}{5} - \frac{4}{3}\frac{x^7}{7} - \frac{2x^3}{3} \Big]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{21} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{21}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{4}{5} - \frac{4}{21}$$

$$= \frac{5}{3} - 4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{21}\right)$$

$$= \frac{5}{3} - 4\left(\frac{26}{105}\right)$$

$$= \frac{5 \times 35 - 104}{105}$$

$$= \frac{175 - 104}{105}$$

$$= \frac{71}{105} \quad //$$