Cálculo C - Lista 1

(1) Funções vetoriais

Determine o domínio e as componentes das funções vetoriais a seguir

1. $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$

   Res.: dom $\vec{F} = \mathbb{R}$; $F_1(t) = t$, $F_2(t) = t^2$, $F_3(t) = t^3$

2. $\vec{F}(t) = \sqrt{t+1}\,\vec{i} + \sqrt{t-1}\,\vec{j} + \vec{k}$

   Res.: dom $\vec{F} = [1, \infty)$; $F_1(t) = \sqrt{t+1}$, $F_2(t) = \sqrt{t-1}$, $F_3(t) = 1$

3. $\vec{F}(t) = \tanh t\,\vec{i} - \frac{1}{t^2-4}\,\vec{k}$

   Res.: dom $\vec{F} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $F_1(t) = \tanh t$, $F_2(t) = 0$, $F_3(t) = -\frac{1}{t^2-4}$

4. $\vec{F}(t) = [(t^2-1)\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \cot t\,\vec{k}] \times [(4-t^2)\,\vec{i} + e^{-5t}\,\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}]$

   Res.: dom $\vec{F} = \cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\big(n\pi, (n+1)\pi\big) = (0,\pi)\cup(\pi, 2\pi)\cup\ldots$; $F_1(t) = \frac{\ln t}{t} - e^{-5t}\cot t$, $F_2(t) = (4-t^2)\cot t - \frac{t^2-1}{t}$, $F_3(t) = (t^2-1)e^{-5t} - (4-t^2)\ln t$

5. $\vec{F}(t) = (t\,\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - t^2\vec{j} + 2\sqrt{t}\,\vec{k})$

   Res.: dom $\vec{F} = [0, \infty)$; $F_1(t) = 2\sqrt{t}$, $F_2(t) = -2t\sqrt{t}$, $F_3(t) = -(t^3+1)$

6. $\vec{F} - \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - \ln t\,\vec{k}$, $\vec{G}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + 2t\vec{k}$

   Res.: $\vec{H} := \vec{F} - \vec{G}$; dom $\vec{H} = (0, \infty)$; $H_1(t) = 2t - e^t$, $H_2(t) = t^2 - e^{-t}$, $H_3(t) = -\ln t - 2t$

7. $2\vec{F} - 3\vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\vec{G}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$

   Res.: $\vec{H} := 2\vec{F} - 3\vec{G}$; dom $\vec{H} = \mathbb{R}$; $H_1(t) = 2t - 3\cos t$, $H_2(t) = 2t^2 - 3\sin t$, $H_3(t) = 2t^3 - 3$

8. $\vec{F} \times \vec{G}$ com $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\vec{G}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$

   Res.: $\vec{H} := \vec{F} \times \vec{G}$; dom $\vec{H} = \mathbb{R}$; $H_1(t) = t^2 - t^3\sin t$, $H_2(t) = t^3\cos t - t$, $H_3(t) = t\sin t - t^2\cos t$

9. $\vec{F} \times \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{t}}\,\vec{k}$, $\vec{G}(t) = (t - \sin t)\,\vec{i} + (1 - \cos t)\,\vec{j}$.

   Res.: $\vec{H} := \vec{F} \times \vec{G}$; dom $\vec{H} = (0, \infty)$; $H_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(1 - \cos t)$, $H_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}(t - \sin t)$, $H_3(t) = -t(t - \sin t)$

10. $f\vec{F}$ onde $\vec{F}(t) = \ln t\,\vec{i} - 4e^{2t}\vec{j} + \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\vec{k}$, $f(t) = \sqrt{t}$.

    Res.: dom $f\vec{F} = [1, \infty)$; $(f\vec{F})_1 = \sqrt{t}\ln t$, $(f\vec{F})_2 = -4\sqrt{t}\,e^{2t}$, $(f\vec{F})_3 = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}}$

11. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \sqrt{t+2}\,\vec{k}$, $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$

    Res.: dom $(\vec{F} \circ g) = [-8, \infty)$, $(\vec{F} \circ g)_1 = \cos t^{1/3}$, $(\vec{F} \circ g)_2 = \sin t^{1/3}$, $(\vec{F} \circ g)_3 = \sqrt{t^{1/3} + 2}$

12. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = e^{-2t}\vec{i} + e^{(t^2)}\vec{j} + t^3\vec{k}$, $g(t) = \ln t$

    Res.: dom $(\vec{F} \circ g) = (0, \infty)$, $(\vec{F} \circ g)_1 = \frac{1}{t^2}$, $(\vec{F} \circ g)_2 = t^{\ln t}$, $(\vec{F} \circ g)_3 = (\ln t)^3$

(2) Limites e continuidade de funções vetoriais

Calcule os limites caso existam

13. $\lim_{t\to 4}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

    Res.: $\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$

14. $\lim_{t\to -1}(3\vec{i} + t\vec{j} + t^5\vec{k})$

    Res.: $3\widehat{i} - \widehat{j} - \widehat{k}$

15. $\lim_{t\to\pi}(\tan t\,\vec{i}+3t\vec{j}-4\vec{k})$

Res.: $3\pi\widehat{j}-4\widehat{k}$

16. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\vec{i}+e^t\vec{j}+(t+\sqrt{2})\vec{k}\right)$

Res.: $\widehat{i}+\widehat{j}+\sqrt{2}\,\widehat{k}$

17. $\lim_{t\to 2}\vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t)=\begin{cases} 5\vec{i}-\sqrt{2t^2+2t+4}\;\vec{j}+e^{-(t-2)}\;\vec{k}, & t<2\\ (t^2+1)\vec{i}+(4-t^3)\vec{j}+\vec{k}, & t>2\end{cases}$$

Res.: $5\widehat{i}-4\widehat{j}+\widehat{k}$

18. $\lim_{t\to 0}\vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t)=\begin{cases} t\,\vec{i}+e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{j}+t^2\vec{k}, & t\neq 0\\ \vec{j}, & t=0\end{cases}$$

Res.: $\vec{0}$

19. $\lim_{t\to 0}(\vec{F}-\vec{G})$ com $\vec{F}(t)=e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+t^3\vec{k}$, $\quad\vec{G}(t)=-\pi\,\vec{i}+\frac{1+\cos t}{t}\vec{j}$

Res.: $\nexists$

20. $\lim_{t\to 1}\vec{F}\cdot\vec{G}$ com $\vec{F}(t)=\frac{\sin(t-1)}{t-1}\vec{i}+\frac{t+3}{t-2}\vec{j}+\cos\pi t\vec{k}$, $\quad\vec{G}(t)=(t^2+1)\vec{i}-\frac{t-2}{t+3}\vec{j}-\sqrt{t^2+1}\vec{k}$

Res.: $1+\sqrt{2}$

21.

$$\lim_{t\to 3}\left(\frac{t^2-5t+6}{t-3}\vec{i}+\frac{t^2-2t-3}{t-3}\vec{j}+\frac{t^2+4t-21}{t-3}\vec{k}\right)$$

Res.: $\widehat{i}+4\widehat{j}+10\widehat{k}$

22.

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2+1}{t-1}\vec{i}+\frac{t^2-1}{t+1}\vec{j}+\frac{t^2+7t-8}{t-1}\vec{k}\right)$$

Res.: $\nexists$

23.

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{\ln t}{t-1}\vec{i}-\frac{e^t-e}{t-1}\vec{j}+\frac{t+1}{t^2}\vec{k}\right)$$

Res.: $\widehat{i}-e\widehat{j}+2\widehat{k}$

24.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\vec{i}+\frac{t-1}{t+1}\vec{j}-\frac{\sinh t}{t}\vec{k}\right)$$

Res.: $\frac{1}{2}\widehat{i}-\widehat{j}-\widehat{k}$

25.
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\,\vec{i}+\frac{1-\cos t}{t}\vec{j}+e^{2t}\vec{k}\right)$$
Res.: $\widehat{i}+\widehat{k}$

26.
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{t}\,\vec{i}+\frac{\tan 2t}{3t}\vec{j}+\ln(1+t)\vec{k}\right)$$
Res.: $3\widehat{i}+\frac{2}{3}\widehat{j}$

27.
$$\lim_{t\to 3}\left\{\left(\frac{9-t^2}{3-t}\right)\vec{i}+\left(\frac{t^2+t-12}{t-3}\right)\vec{j}+\left(\frac{t^3-13t+12}{t-3}\right)\vec{k}\right\}$$
Res.: $6\widehat{i}+7\widehat{j}+14\widehat{k}$

28. $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\,\vec{i}+\frac{t-1}{t+1}\,\vec{j}+\frac{\sin t^3}{t^2}\,\vec{k}\right)$
Res.: $\widehat{j}$

29. $\lim_{t\to 0^+}\left(t\,\vec{i}+2t^{\frac{1}{4}}\vec{j}-\frac{\ln t}{t}\,\vec{k}\right)$
Res.: $\nexists$

30. $\lim_{t\to 1^+}\left(e^{\frac{1}{1-t}}\vec{i}+\sqrt{t-1}\,\vec{j}+\ln t\,\vec{k}\right)$
Res.: $\vec{0}$

31. $\lim_{t\to 1^-}\left(\sqrt{1-t}\,\vec{i}-(1-t)\;\ln(1-t)\,\vec{j}\right)$
Res.: $\vec{0}$

Determine os intervalos onde as funções vetoriais são contínuas

32. $\vec{F}(t)=4t\,\vec{j}-\sqrt{5}\,\vec{k}$
Res.: $\mathbb{R}$

33.
$$\vec{F}(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t}\,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, & t<0\\ (t^2+1)\vec{i}+\ln(t+3)\vec{j}+\vec{k}, & t\geq 0\end{cases}$$
Res.: $\mathbb{R}-\{0\}$

34.
$$\vec{F}(t)=\begin{cases}(2t+1)\,\vec{i}+(2t-1)\,\vec{j}+4t\,\vec{k}, & t<-3\\ (t-2)\,\vec{i}-(t+10)\,\vec{j}+(2t-9)\,\vec{k}, & t\geq -3\end{cases}$$
Res.: $\mathbb{R}-\{-3\}$

35.
$$\vec{F}(t)=\begin{cases}t\,\vec{i}+(3t-2)\,\vec{j}+(3-t)\,\vec{k}, & -\infty<t<2\\ 2\,\vec{i}+(2+t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}, & 2\leq t<\infty\end{cases}$$
Res.: $\mathbb{R}-\{2\}$

36.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t^2\,\vec{i} + (3-t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}, & -\infty < t < 1 \\ t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + (2-t^2)\,\vec{k}, & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

Res.: $\mathbb{R}$

(3) Derivadas de funções vetoriais

Encontre as derivadas das funções vetoriais a seguir

37. $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j}$

Res.: $\widehat{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\widehat{j}$

38. $\vec{F}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + t^{-\frac{3}{2}}\vec{j} + \ln(2t-1)\vec{k}$

Res.: $\frac{1}{2\sqrt{t}}\widehat{i} - \frac{3}{2}t^{-5/2}\widehat{j} + \frac{2}{2t-1}\widehat{k}$

39. $\vec{F}(t) = \arcsin t\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j} + e^{-t^3}\vec{k}$

Res.: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\widehat{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\widehat{j} - 3t^2e^{-t^3}\widehat{k}$

40. $\vec{F}(t) = e^{\sqrt{t}}\,\vec{i} + 3\vec{j} - \arccos 2t\,\vec{k}$

Res.: $\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,\widehat{i} + \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}\,\widehat{k}$

41. $\vec{F}(t) = \tan t\,\vec{i} + \vec{j} + \sec t\,\vec{k}$

Res.: $\sec^2 t\,\widehat{i} + \sec t\ \tan t\,\widehat{k}$

42. $\vec{F}(t) = e^t\cos t\,\vec{i} - e^t\sin t\,\vec{k}$

Res.: $(e^t\cos t - e^t\sin t)\widehat{i} + (-e^t\sin t - e^t\cos t)\widehat{k}$

43. $\vec{F}(t) = \cosh t\,\vec{i} + \sinh t\,\vec{j} - \sqrt{t}\,\vec{k}$

Res.: $\sinh t\,\widehat{i} + \cosh t\,\widehat{j} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\widehat{k}$

Sejam $f(t) = t^2+3$, $g(t) = 2t^3-3t$, $\vec{u}(t) = t\,\vec{i} - t^2\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, e $\vec{v}(t) = \vec{i} - 2t\,\vec{j} + 3t^2\vec{k}$. Determine

44. $\frac{d\vec{u}}{dt}$

Res.: $\widehat{i} - 2t\widehat{j} + 2\widehat{k}$

45. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{v}(t))$

Res.: $2t\,\widehat{i} + (-6t^2-6)\widehat{j} + (12t^3+18t)\widehat{k}$

46. $\frac{d}{dt}(g(t)\vec{u}(t))$

Res.: $(8t^3-6t)\widehat{i} + (-10t^4+9t^2)\widehat{j} + (16t^3-12t)\widehat{k}$

47. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})$

Res.: $(8t-12t^3)\widehat{i} + (2-9t^2)\widehat{j} - 2t\,\widehat{k}$

48. $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times t\vec{v}),\ \ \frac{d}{dt}(t\vec{u}\times\vec{v}),\ \ \frac{d}{dt}(t(\vec{u}\times\vec{v}))$

Res.: $(12t^2-15t^4)\widehat{i} + (4t-12t^3)\widehat{j} - 3t^2\widehat{k}$

49. $\frac{d}{dt}(2\vec{u}\cdot\vec{v})$

Res.: $2+48t^2$

50. $\frac{d}{dt}(3\vec{u}+4\vec{v})$
Res.: $3\widehat{\imath}+(-6t-8)\widehat{\jmath}+(6+24t)\widehat{k}$

51. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u}+g(t)\vec{v})$
Res.: $9t^2\widehat{\imath}+(-20t^3+6t)\widehat{\jmath}+(6-21t^2+30t^4)\widehat{k}$

52. $\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}-f(t)\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$
Res.: $(-6t^3+4t-14t^4-42t^2)\widehat{\imath}+(-6t^2+28t^5+84t^3)\widehat{\jmath}+(-2t-42t^6-126t^4)\widehat{k}$

53. Prove que para funções diferenciáveis $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{w}(t)$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}\right)=\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\times\vec{w}\ +\ \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{w}\ +\ \vec{u}\cdot\vec{v}\times\frac{d\vec{w}}{dt}$$

54. Seja $\vec{u}(t)$ uma função diferenciável com comprimento constante (isto é $|\vec{u}|=$ cte para todo $t\in$ dom $\vec{u}$). Mostre que em qualquer ponto onde ocorre $\frac{d\vec{u}}{dt}\neq 0$ tem-se $\frac{d\vec{u}}{dt}$ perpendicular a $\vec{u}$. Qual a interpretação física desse resultado no caso onde $\vec{r}(t)$ representa a posição de uma partícula?

55. Seja $\vec{v}=\vec{v}(s)$ uma função diferenciável e $s=s(t)$ uma função escalar diferenciável. Mostre que

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

(Regra da cadeia para a diferenciação de funções vetoriais)

56. O teorema do valor médio para funções de uma variável diz que: se $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua e diferenciável para todo $t\in(a,b)$ então existe $c\in(a,b)$ tal que se tem $\frac{df}{dt}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Verifique se vale um resultado semelhante para funções vetoriais, isto é, dada uma função vetorial $\vec{F}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), existe $c\in(a,b)$ satisfazendo

$$\vec{F}\,'(c)=\frac{\vec{F}(b)-\vec{F}(a)}{b-a}\ ?$$

57. Seja $\vec{F}(t)=\sin t\ \vec{\imath}-\cos t\vec{\jmath}$. Mostre que para todo $t\in\mathbb{R}$ os vetores $\vec{F}(t)$ e $\vec{F}''(t)$ são paralelos.

58. Mostre que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{F}'\right)=\vec{F}(t)\times\vec{F}''(t)$$

59. Suponha que $\vec{F}(t)$ é paralelo á $\vec{F}''(t)$ para todo t. Mostre que $\vec{F}\times\vec{F}'$ é constante.

(4) Integrais de funções vetoriais

Calcule as integrais das funções vetoriais a seguir

60. $\int dt\ \left(t^2\vec{i} - (3t-1)\vec{j} - \frac{1}{t^3}\vec{k}\right)$
Res.: $\frac{t^3}{3}\hat{i} - (\frac{3t^2}{2} - t)\hat{j} + \frac{1}{2t^2}\hat{k}$

61. $\int dt\ \left(t\cos t\vec{i} + t\sin t\ \vec{j} + 3t^4\ \vec{k}\right)$
Res.: $(t\sin t + \cos t)\hat{i} + (-t\cos t + \sin t)\hat{j} + \frac{3t^5}{5}\hat{k}$

62. $\int_a^b dt\ (t\ \vec{i} + t^2\ \vec{j} - t^3\ \vec{k})$
Res.: $(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2})\hat{i} + (\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3})\hat{j} + (-\frac{b^4}{4} + \frac{a^4}{4})\hat{k}$

63. $\int_0^1 dt\ (t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k})$
Res.: $\frac{1}{3}\hat{i} - \hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt\ \left(\cos t\ \vec{i} + \sin 2t\ \vec{j} + \cos^2 t\ \vec{k}\right)$
Res.: $\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4})\hat{k}$

65. $\int_1^4 dt\ (e^t\vec{i} + t^2\ \vec{j} + \ln 2t\ \vec{k})$
Res.: $(e^4 - e)\hat{i} + 21\hat{j} + (11\ln 2 - 3)\hat{k}$

66. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^t ds\ \left(s\tan s^3\ \vec{i} + \cos e^s\ \vec{j} + e^{(s^2)}\ \vec{k}\right)$. Encontre $\frac{d}{dt}\vec{F}(t)$.
Res.: $t\tan t^3\ \hat{i} + \cos e^t\ \hat{j} + e^{t^2}\hat{k}$

67. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^{t^2} ds\ \left(\cos s\ \vec{i} + e^{-(s^2)}\vec{j} + \tan s\ \vec{k}\right)$. Encontre $\frac{d}{dt}\vec{F}(t)$.
Res.: $2t\cos t^2\hat{i} + 2te^{-t^4}\hat{j} + 2t\tan t^2\hat{k}$