

Cálculo C - Lista 3

Campos escalares e vetoriais

Gradiente, divergência e rotacional

1. Calcule a divergência e rotacional do campo vetorial abaixo

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$

(b) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$

(c) $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

(d) $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{x}{z}\vec{i} - \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$

(e) $\vec{F}(x, y, z) = e^x \cos y\vec{i} + e^x \sin y\vec{j} + z\vec{k}$

2. Determine se \vec{F} é o gradiente de uma certa função φ . Se for, determine φ .

(a) $\vec{F}(x, y) = e^y\vec{i} + (xe^y + y)\vec{j}$

(b) $\vec{F}(x, y) = (\sin xy)\vec{i} + (\cos xy)\vec{j}$

(c) $\vec{F}(x, y, z) = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + (x^2y + 1)\vec{k}$

(d) $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$

(e) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + x^2)\vec{i} + (z^2 + y^2)\vec{j} + (x^2 + z^2)\vec{k}$

3. Sejam f e g campos escalares e \vec{F} e \vec{G} campos vetoriais. Determine quais das expressões a seguir representam campos vetoriais, quais representam campos escalares e quais não tem sentido.

(a) $\nabla(fg)$

(b) $\nabla\vec{F}$

(c) $\nabla \times (\nabla f)$

(d) $\nabla(\nabla \cdot \vec{F})$

(e) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$

(f) $\nabla \cdot (\nabla f)$

(g) $(\nabla f) \times (\nabla \times \vec{F})$

(h) $\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla f))$

(i) $\nabla \times (\nabla \cdot (\nabla f))$

Mostrar que ¹

4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ [o rotacional de um campo vetorial é solenoidal]

¹Obs.: Um campo vetorial \vec{A} é dito **solenoidal** se $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. \vec{A} é dito **irrotacional** se $\nabla \times \vec{A} = 0$.

5. $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ [o gradiente de um campo escalar é irrotacional]

6. $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla f) \cdot \vec{F}$

7. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

8. $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$

9. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

10. Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ funções com derivadas parciais de segunda ordem contínua. Mostre que $\nabla f \times \nabla g$ é solenoidal.

11. Seja $\vec{F}(x, y, z) = F_1(y, z)\vec{i} + F_2(x, z)\vec{j} + F_3(x, y)\vec{k}$. Mostre que \vec{F} é solenoidal.

12. (a) Encontre constantes a, b, c de modo que o campo vetorial $\vec{F} = (x^2 + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$ seja irrotacional.
(b) Se \vec{F} é irrotacional, encontre um campo escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

13. Seja $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ onde $\vec{\omega}$ é um vetor constante, e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Mostre que $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})$.

14. Mostre que se a função $f(x, y, z)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

então ∇f é campo irrotacional e solenoidal.

Respostas

1. a. $\nabla \cdot \vec{F} = 2, \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
b. $\nabla\vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
c. $\nabla \cdot \vec{F} = 2(x + y + z), \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
d. $\nabla \cdot \vec{F} = -\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2},$
 $\nabla \times \vec{F} = -\frac{y}{z^2}\vec{i} + \frac{x}{z^2}\vec{j}$
2. a. $\vec{F} = \nabla(e^y x + \frac{y^2}{2} + C)$
b. $\nexists \varphi$
c. $\vec{F} = \nabla(x^2 y z + z + C)$
d. $\nexists \varphi$

e. $\neq \varphi$

3. a. Campo vetorial
b. Não tem sentido
c. Campo vetorial
d. Campo vetorial
e. Campo vetorial
f. Campo escalar
g. Campo vetorial
h. Campo escalar
i. Não tem sentido