

Cálculo C - Lista 12

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Notação:

Equação homogênea: $y' + p(x)y = 0$ (*)

Equação não-homogênea: $y' + p(x)y = r(x)$ (**)

Resolva as equações

1. $y' + 2y = x^2 + 2x$

2. $y' - y = 2$

3. $y' - 2y = 1 - 2x$

4. $xy' + y = 2x$

5. $y' + ky = e^{-kx}$

6. $y' = 2y/x + x^2e^x$

7. $y' - 4y = x - 2x^2$

8. $xy' + 2y = 2e^{x^2}$

9. $y' + 2xy = -6x$

Resolva os problemas de valor inicial

10. $y' + y = (x + 1)^2$; $y(0) = 0$

11. $y' - 2y = 2 \cosh 2x + 4$; $y(0) = -5/4$

12. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2$; $y(1) = e - 1$

13. $y' = 2(y - 1) \tanh 2x$; $y(0) = 4$

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear homogênea (*).

14. $y \equiv 0$ é solução de (*) [$y \equiv 0$ é dita solução trivial].

15. Se y_1 é solução de (*) então $y = cy_1$ ($c \in R$) também é solução.

16. Se y_1, y_2 são soluções de (*) então $y = y_1 + y_2$ também é solução. [No caso mais geral $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ($c_1, c_2 \in R$) também será solução de (*) $\forall c_1, c_2 \in R$]

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear não-homogênea (**).

17. Se y_1 é uma solução de (**) e y_2 é uma solução de (*) então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de (**).

18. A diferença $y = y_1 - y_2$ de duas soluções y_1, y_2 de (**) é uma solução de (*).

19. Se y_1 é uma solução de (**) então $y = cy_1$ é uma solução de $y' + py = cr$.

20. Se y_1 é uma solução de $y'_1 + py_1 = r_1$ e y_2 é uma solução de $y'_2 + py_2 = r_2$ (com a mesma função p) então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de $y' + py = r_1 + r_2$.

21. Se $p(x)$ e $r(x)$ são funções constantes, digamos $p(x) = p_0$ e $r(x) = r_0$, então (**) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Determine a solução e mostre que ela coincide com a solução obtida usando

$$y(x) = e^{-h} \left[\int e^h r dx + C \right] \text{ com } h \equiv \int p(x) dx$$

Resolva as equações de Bernoulli

22. $y' + y = xy^{-1}$

23. $3y' + y = (1 - 2x)y^4$

24. $y' + xy = xy^{-1}$

Lista 12 - Resposta

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$

2. $y = -2 + Ce^x$

3. $y = x + Ce^{2x}$

4. $y = x + \frac{C}{x}$

5. $y = e^{-kx}(C+x)$

6. $y = x^2e^x + Cx^2$

7. $y = \frac{x^2}{2} + Ce^{4x}$

8. $y = x^{-2}(e^{x^2} + C)$

9. $y = -3 + Ce^{-x^2}$

10. $y = 1 + x^2 - e^{-x}$

11. $y = e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} - 2$

12. $y = -x + x^3e^x$

13. $y = 1 + 3\cosh 2x$

22. $y^2 = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$

23. $y = (Ce^x - 2x - 1)^{\frac{1}{3}}$

24. $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$