Cálculo C - Lista 12

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Notação:

Equação homogênea: $y' + p(x)y = 0$ $(*)$

Equação não-homogênea: $y' + p(x)y = r(x)$ $(**)$

Resolva as equações

1. $y' + 2y = x^2 + 2x$
2. $y' - y = 2$
3. $y' - 2y = 1 - 2x$
4. $xy' + y = 2x$
5. $y' + ky = e^{-kx}$
6. $y' = 2y/x + x^2 e^x$
7. $y' - 4y = x - 2x^2$
8. $xy' + 2y = 2e^{x^2}$
9. $y' + 2xy = -6x$

Resolva os problemas de valor inicial

10. $y' + y = (x+1)^2$; $y(0) = 0$
11. $y' - 2y = 2\cosh 2x + 4$; $y(0) = -5/4$
12. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2$; $y(1) = e - 1$
13. $y' = 2(y-1)\tanh 2x$; $y(0) = 4$

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear homogênea $(*)$.

14. $y \equiv 0$ é solução de $(*)$ [$y \equiv 0$ é dita solução trivial].
15. Se y_1 é solução de $(*)$ então $y = cy_1$ $(c \in R)$ também é solução.
16. Se y_1, y_2 são soluções de $(*)$ então $y = y_1 + y_2$ também é solução. [No caso mais geral $y = c_1y_1 + c_2y_2$ $(c_1, c_2 \in R)$ também será solução de $(*)$ $\forall c_1, c_2 \in R$]

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear não-homogênea $(**)$.

17. Se y_1 é uma solução de $(**)$ e y_2 é uma solução de $(*)$ então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de $(**)$.
18. A diferença $y = y_1 - y_2$ de duas soluções y_1, y_2 de $(**)$ é uma solução de $(*)$.
19. Se y_1 é uma solução de $(**)$ então $y = cy_1$ é uma solução de $y' + py = cr$.
20. Se y_1 é uma solução de $y_1' + py_1 = r_1$ e y_2 é uma solução de $y_2' + py_2 = r_2$ (com a mesma função p) então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de $y' + py = r_1 + r_2$.
21. Se $p(x)$ e $r(x)$ são funções constantes, digamos $p(x) = p_0$ e $r(x) = r_0$, então $(**)$ pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis e a solução é dada por

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^h r\,dx + C\right] \quad \text{com } h \equiv \int p(x)dx$$

Resolva as equações de Bernoulli

22. $y' + y = xy^{-1}$
23. $3y' + y = (1 - 2x)y^4$
24. $y' + xy = xy^{-1}$

Determine a solução e mostre que ela coincide com aquela obtida usando

Lista 12 - Resposta

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$

2. $y = -2 + Ce^{x}$

3. $y = x + Ce^{2x}$

4. $y = x + \frac{C}{x}$

5. $y = e^{-kx}(C + x)$

6. $y = x^2e^x + Cx^2$

7. $y = \frac{x^2}{2} + Ce^{4x}$

8. $y = x^{-2}(e^{x^2} + C)$

9. $y = -3 + Ce^{-x^2}$

10. $y = 1 + x^2 - e^{-x}$

11. $y = e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} - 2$

12. $y = -x + x^3e^x$

13. $y = 1 + 3\cosh 2x$

22. $y^2 = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$

23. $y = (Ce^x - 2x - 1)^{-\frac{1}{3}}$

24. $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$

Lista 12 - Cálculo C

1. $\underset{p}{y' + \underbrace{2}y} = \underbrace{x^2 + 2x}_{r}$ ∴ eq. não-homogênea

Fator integrante: $F(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{2x}$

∴

$$\underbrace{e^{2x}(y' + 2y)} = e^{2x}(x^2 + 2x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^{2x}x^2 + 2xe^{2x}$$

$$e^{2x}y = \underset{①}{\int e^{2x}x^2\,dx} + \underset{②}{\int 2xe^{2x}\,dx} + C$$

---

② $= \int 2xe^{2x}dx = xe^{2x} - \int e^{2x}dx$

$u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = 2e^{2x}dx \rightarrow v = e^{2x}$

$$= xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$$

---

① $= \int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \underline{\int xe^{2x}dx}$

$u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$

$dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4}$$

$\therefore$

$$e^{2x}y = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{e^{2x}}{4} + xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$$

$$e^{2x}y = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}}$$

---

2. $y' - y = 2$; $p(x) = -1$, $r(x) = 2$

$$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-x}$$

$$e^{-x}(y' - y) = 2e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = 2e^{-x}$$

$$e^{-x}y = \int 2e^{-x}\,dx + C$$

$$e^{-x}y = -2e^{-x} + C$$

$$\therefore \quad \boxed{y = -2 + Ce^{x}}$$

3. $y' - 2y = 1 - 2x \quad ; \quad p(x) = -2$

$r(x) = 1 - 2x$

$F(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-2x}$

$e^{-2x}(y' - 2y) = e^{-2x}(1 - 2x)$

$\frac{d}{dx}(e^{-2x}y) = e^{-2x}(1 - 2x)$

$e^{-2x}y = \int e^{-2x}(1 - 2x)\,dx + C$

$e^{-2x}y = \int e^{-2x}dx + \int -2x\,e^{-2x}dx + C$

$(*)$

$(*) = \int -2x\,e^{-2x}dx = x e^{-2x} - \int e^{-2x}dx$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = -2e^{-2x}dx \rightarrow v = e^{-2x}$

$= x e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{-2}$

$= x e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

$e^{-2x}y = \cancel{\frac{e^{-2x}}{-2}} + x e^{-2x} + \cancel{\frac{1}{2}e^{-2x}} + C$

$\boxed{y = x + Ce^{2x}}$

4. $xy' + y = 2x$

$\therefore \quad y' + \frac{1}{x}y = 2$ Eq. linear

$p(x) = \frac{1}{x}$, $r(x) = 2$

$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|$

$|x|\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = 2|x| \Leftrightarrow x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = 2x$ se $x > 0$ (*)

$-x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = -2x$ se $x < 0$

$\therefore x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = 2x$ se $x < 0$ (**)

de (*) e (**):

$|x|\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = 2|x| \Leftrightarrow x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = 2x$, $x \neq 0$

$\frac{d}{dx}(xy) = 2x$

$xy = \int 2x\,dx + C$

$xy = x^2 + C$

$$\boxed{y = x + \frac{C}{x}}$$

5. $y' + ky = e^{-kx}$; $p(x) = k$

$r(x) = e^{-kx}$

$$f(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{kx}$$

$$\therefore \quad \underbrace{e^{kx}(y' + ky)}_{} = e^{kx} e^{-kx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{kx}y\right) = 1$$

$$e^{kx}y = x + c$$

$$\boxed{y = e^{-kx}(c + x)}$$

---

6. $y' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x$

$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$; $p(x) = \frac{-2}{x}$, $r(x) = x^2 e^x$

$$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right)}_{} = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = e^x \rightarrow \frac{1}{x^2}y = e^x + c$$

$$\boxed{y = x^2 e^x + cx^2}$$

7. $y' - 4y = x - 2x^2$; $p(x) = -4$
$r(x) = x - 2x^2$

$F(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -4 dx} = e^{-4x}$

$\therefore$

$$\underbrace{e^{-4x}(y' - 4y)} = e^{-4x}(x - 2x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-4x}y) = xe^{-4x} - 2x^2e^{-4x}$$

$$e^{-4x}y = \underbrace{\int xe^{-4x}dx}_{1} - 2\underbrace{\int x^2e^{-4x}dx}_{2} + C$$

$$1 = \int x e^{-4x}dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}dx$$

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = e^{-4x}dx \rightarrow v = \frac{e^{-4x}}{-4}$

$$= -\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}$$

$$2 = -2\int x^2e^{-4x}dx = -2\left(-\frac{1}{4}x^2e^{-4x} + \frac{1}{4}2\int xe^{-4x}dx\right)$$

$u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$
$dv = e^{-4x}dx \rightarrow v = \frac{1e^{-4x}}{-4}$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{-4x} - \underbrace{\int xe^{-4x}dx}$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{-4x} - \left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{-4x} + \frac{x}{4}e^{-4x} + \frac{1}{16}e^{-4x}$$

Cont. 7

$$e^{-4x}y = \cancel{-\frac{x}{4}e^{-4x}} \cancel{-\frac{1}{16}e^{-4x}} + \frac{x^2}{2}e^{-4x} + \cancel{\frac{x}{4}e^{-4x}} + \cancel{\frac{1}{16}e^{-4x}} + C$$

$$e^{-4x}y = \frac{x^2}{2}e^{-4x} + C$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{x^2}{2} + Ce^{4x}}$$

---

8. $xy' + 2y = 2e^{x^2}$.

$\therefore \quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{2}{x}e^{x^2}$; $p(x) = \frac{2}{x}$, $r(x) = \frac{2}{x}e^{x^2}$

$$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x|^2} = |x|^2 = x^2$$

$$x^2\left(y' + \frac{2}{x}y\right) = 2xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = 2xe^{x^2}$$

$$x^2y = \int 2xe^{x^2}dx + C$$

$$= e^{x^2} + C$$

$$\boxed{y = x^{-2}(e^{x^2} + C)}$$

9. $y' + 2xy = -6x \quad ; \quad p(x) = 2x$

$$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore \quad e^{x^2}(y' + 2xy) = -6x\, e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = -6x\, e^{x^2}$$

$$e^{x^2} y = \int -6x\, e^{x^2}\,dx + C$$

$$e^{x^2} y = -3e^{x^2} + C$$

$$\therefore \quad \boxed{y = -3 + Ce^{-x^2}}$$

---

10. $y' + y = (x+1)^2 \quad ; \quad y(0) = 0$

$p(x) = 1 \quad , \quad r(x) = (x+1)^2$

$$f(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x}$$

$$\therefore \quad \underline{e^{x}(y' + y)} = e^{x}(x+1)^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x} y\right) = e^{x}(x+1)^2$$

$$e^{x} y = \int e^{x}(x+1)^2\,dx + C$$

Cont. 10

$$e^x y = \int (e^x x^2 + 2x e^x + e^x)\, dx + C$$

$$= \int x^2 e^x\, dx + 2\int x e^x\, dx + \int e^x dx + C$$

(1) (2) (3)

(2) $= \int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x dx$

$u = x \to du = dx$ $\qquad = x e^x - e^x$

$dv = e^x dx \to v = e^x$

(1) : $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\, dx$

$u = x^2 \to du = 2x\, dx$ | $= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)$

$dv = e^x dx \to v = e^x$ | $= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$

$$e^x y = x^2 e^x \cancel{- 2x e^x} \cancel{+ 2e^x} + 2(\cancel{x e^x} - \cancel{e^x}) + e^x + C$$

$$e^x y = x^2 e^x + e^x + C$$

$\therefore \begin{cases} y = x^2 + 1 + Ce^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$

11. $y' \underbrace{-2}_{p} y = \underbrace{2\cosh 2x + 4}_{r}$; $y(0) = -\frac{5}{4}$

$$F(x) = e^{\int p\,dx} = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

$\therefore$

$$\underbrace{e^{-2x}(y' - 2y)} = e^{-2x}\, 2\cosh 2x + 4e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) = 2e^{-2x}\cosh 2x + 4e^{-2x}$$

$$e^{-2x}y = 2\int e^{-2x}\cosh 2x\,dx + 4\int e^{-2x}\,dx + C$$

$$= \cancel{2}\int e^{-2x}\,\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{\cancel{2}}\,dx + 4\,\frac{e^{-2x}}{-2} +$$

$$= \int \left(1 + e^{-4x}\right)dx - 2e^{-2x} + C$$

$$e^{-2x}y = x + \frac{e^{-4x}}{-4} - 2e^{-2x} + C$$

$$y = xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} - 2 + Ce^{2x}$$

$$// \; y = e^{2x}(x + C) - \frac{1}{4}e^{-2x} - 2 \; //$$

$$y(0) = -\frac{5}{4} = C - \frac{1}{4} - 2$$

$$-\frac{5}{4} = C - \frac{9}{4} \Rightarrow C = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \underline{\underline{1}}$$

Cont. 11

$$\boxed{y(x) = e^{2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} - 2}$$

12. $y' - (1+3x^{-1})y = x+2 \quad ; \quad y(1) = e-1$

$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int (1+\frac{3}{x})\,dx}$

$= e^{-(x+3\ln|x|)} = e^{-x}\, e^{-3\ln|x|}$

$= e^{-x}\, e^{\ln|x|^{-3}}$

$= 1\dfrac{e^{-x}}{x^3}$

$$\frac{e^{-x}}{x^3}\left(y' - (1+3x^{-1})y\right) = \frac{e^{-x}}{x^3}(x+2)$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{x^3}y\right)dx = \underbrace{\int x^{-2}e^{-x}\,dx}_{1} + \underbrace{\int 2x^{-3}e^{-x}\,dx}_{2} + C$$

$$1 = \int x^{-2}e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{x^2} - \int 2x^{-3}e^{-x}\,dx$$

$u = x^{-2} \rightarrow du = -2x^{-3}dx$

$dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x}$

$$\left(\frac{e^{-x}}{x^3}y\right) = -\frac{e^{-x}}{x^2} - 2\cancel{\int x^{-3}e^{-x}\,dx} + C$$

$$+2\cancel{\int x^{-3}e^{-x}\,dx}$$

$$\frac{e^{-x}}{x^3}y = -\frac{e^{-x}}{x^2} + C$$

$$y = -x + Cx^3e^{x}$$

$y(1) = e-1$

$$\therefore \quad e-\cancel{1} = -\cancel{1} + Ce$$

$$\cancel{e} = C\cancel{e} \Rightarrow C = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{y = -x + x^3e^{x}}$$

13. $y' = 2(y-1)\,\text{tgh}\,2x \quad ; \quad y(0) = 4$

$$y' \underbrace{-\,2\,\text{tgh}\,2x}_{p(x)}\; y = \underbrace{-2\,\text{tgh}\,2x}_{r(x)}$$

$$f(x) = e^{\int p\,dx} = e^{-2\underbrace{\int \text{tgh}\,2x\,dx}}$$

$$= e^{-\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\ln\cosh 2x}$$

$$= e^{\ln(\cosh 2x)^{-1}}$$

$\left[\int \text{tgh}\,x\,dx = \ln\cosh x\right]$ $= (\cosh 2x)^{-1} = \text{sech}\,2x$

$\therefore$

$$\underbrace{\text{sech}\,2x\,(y' - 2\,\text{tgh}\,2x\;y)} = \text{sech}\,2x\,(-2\,\text{tgh}\,2x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sech}\,2x\;y) = -2\,\text{sech}\,2x\,\text{tgh}\,2x$$

$$\therefore \quad \text{sech}\,2x\;y = \int -2\,\underbrace{\text{sech}\,2x\,\text{tgh}\,2x\,dx} + C$$

$\left[\int \text{sech}\,x\,\text{tgh}\,x\,dx = -\text{sech}\,x\right]$ $= -2\left(-\dfrac{\text{sech}\,2x}{2}\right) + C$

$$\text{sech}\,2x\;y = \text{sech}\,2x + C$$

$$\therefore \quad y = 1 + C\,(\text{sech}\,2x)^{-1}$$

Cont. 13

$// \; y = 1 + c \cosh 2x \; //$

$y(0) = 4 = 1 + c \cosh 0$

$= 1 + c \implies c = 3$

$\therefore \boxed{y = 1 + 3\cosh 2x}$

---

14. $y' + p(x)\, y = 0 \quad (*)$

Se $y(x) = 0$ então $y' = 0$

$\therefore \quad 0 + p(x)\, 0 = 0$

$0 = 0$ OK!

$\therefore$ $\boxed{y(x) = 0 \text{ é solução de } (*)}$

---

15. $y' + p(x)\, y = 0 \quad (*)$

Se y_1 solução de $(*)$ $\Rightarrow y_1' + p\, y_1 = 0$

Seja $y = c\, y_1 \quad (c \in \mathbb{R})$, então

$y' = c\, y_1'$

Daí $y' + py = c\, y_1' + p c\, y_1 = c\,\underbrace{(y_1' + p y_1)}_{=0} = 0$

Cont. 15

$\therefore \quad y' + py = 0 \Rightarrow$ $\boxed{y = c y_1 \text{ é solução de } \circledast}$

---

16. $y' + p(x) y = 0 \quad \circledast$

Sejam y_1, y_2 soluções de $\circledast$:

i.e. $\begin{cases} y_1' + p(x) y_1 = 0 \\ y_2' + p(x) y_2 = 0 \end{cases}$

Seja $y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Então $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$

Daí $y' + p(x) y = c_1 y_1' + c_2 y_2' + p(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2)$

$$= c_1 (\underbrace{y_1' + p(x) y_1}_{=0}) + c_2 (\underbrace{y_2' + p(x) y_2}_{=0})$$

$$= 0$$

$\therefore$ $\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \text{ é solução de } \circledast}$

17.

(**) $y' + p(x) y = r(x) \Leftrightarrow y_1' + p(x) y_1 = r(x)$

$y' + p(x) y = 0 \Leftrightarrow y_2' + p(x) y_2 = 0$

Seja $y = y_1 + y_2$.

Então $y' = y_1' + y_2'$

Daí $y' + p(x) y = y_1' + y_2' + p(x)(y_1 + y_2)$

$= \underbrace{y_1' + p(x) y_1}_{} + \underbrace{y_2' + p(x) y_2}_{=0}$

$= r(x)$

$\therefore$ $\boxed{y = y_1 + y_2 \text{ é solução de (**)}}$

18. $y' + p(x) y = r(x)$: $\begin{cases} y_1' + p(x) y_1 = r(x) \\ y_2' + p(x) y_2 = r(x) \end{cases}$

Seja $y = y_1 - y_2$

Então $y' + p(x) y = y_1' - y_2' + p(x) y_1 - p(x) y_2$

$= \underbrace{y_1' + p(x) y_1}_{} - \underbrace{(y_2' + p(x) y_2)}_{}$

$= r(x) - r(x)$

$= 0$

Cont. 18

Isto é, $\boxed{y = y_1 - y_2 \text{ é solução de } \circledast}$

19. $y' + p(x)\, y = r$: $y_1' + p(x)\, y_1 = r(x)$

Seja $y = c y_1$, $c \in \mathbb{R}$

então
$$y' + p(x)\, y = c y_1' + p c y_1$$
$$= c\,(y_1' + p y_1)$$
$$= c\, r(x)$$

$\therefore$ $\boxed{y = c y_1 \text{ é solução de } y' + p(x)\, y = c\, r(x)}$

20. $\begin{cases} y_1' + p y_1 = r_1 \\ y_2' + p y_2 = r_2 \end{cases}$

Seja $y = y_1 + y_2$

então, $y' + p y = y_1' + y_2' + p y_1 + p y_2$
$$= \underbrace{y_1' + p y_1} + y_2' + p y_2$$
$$= r_1 + r_2$$

21. $y' + p_0 y = r_0$ $\qquad p_0, r_0 = cte.$

$\therefore\ y' = r_0 - p_0 y$ $\qquad$ [$g(y)\,y' = f(x)$ Eq. variável separável]

$$\frac{1}{r_0 - p_0 y}\,dy = dx$$

$$\frac{\ln|r_0 - p_0 y|}{-p_0} = x + c$$

$$\ln|r_0 - p_0 y| = -p_0 x - p_0 c$$

$\therefore$ $$|r_0 - p_0 y| = e^{-p_0 c}\,e^{-p_0 x}$$

$$r_0 - p_0 y = c_1 e^{-p_0 x}$$

$$\boxed{y = \frac{r_0 - c_1 e^{-p_0 x}}{p_0}}$$

- Seja

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right] \ ; \quad h = \int p\,dx$$

$$h = \int p_0\,dx = p_0 x$$

$$= e^{-p_0 x}\left[\int e^{p_0 x} r_0\,dx + c\right]$$

$$= e^{-p_0 x}\left[e^{p_0 x}\frac{r_0}{p_0} + c\right]$$

$$\boxed{y = \frac{r_0}{p_0} + c\,e^{-p_0 x}} \quad \Leftarrow \quad c = \frac{-c_1}{p_0}$$

Cont. 21

Daí as soluções coincidem, como tinha de ser

---

22. $y' + y = x y^{-1}$

Forma geral da eq. Bernoulli:

$$y' + py = g(x)\, y^{a}$$

Seja $u = y^{1-a}$

$\therefore \quad u' + (1-a)\, p u = (1-a) g$

Aqui $\begin{cases} a = -1 \\ p = 1 \\ g = x \end{cases}$ $\quad \therefore \quad \underline{\underline{u = y^2 \;\; \xi \;\; y = \pm\sqrt{u}}}$

A eq. em termos de u se escreve como:

$$u' + 2u = 2x$$

$p = 2 \quad \therefore \quad F = e^{\int p\,dx} = e^{2x}$

$$\therefore \quad e^{2x}(u' + 2u) = e^{2x}\, 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x} u\right) = 2x e^{2x}$$

$$e^{2x} u = \int 2x e^{2x}\, dx + C$$

Mas $2\int x e^{2x} = 2\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right]$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^{2x}dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}$

$= xe^{2x} - \int e^{2x}dx$

$= xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$

$\therefore$

$$e^{2x}u = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$u = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

$\downarrow$

$$\boxed{y^2 = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}}$$

---

23. $3y' + y = (1-2x)y^4$

$\therefore y' + \frac{1}{3}y = \frac{(1-2x)}{3}y^4 \Leftarrow y' + py = gy^a$

$\therefore \begin{cases} p = \frac{1}{3} & g = \frac{1-2x}{3} \\ a = 4 \end{cases}$

$\downarrow$

$\therefore$

$u' + (1-a)pu = (1-a)g$

$u = y^{1-a} = y^{-3}$

$u' - \cancel{3}\frac{1}{\cancel{3}}u = -\cancel{3}\frac{1-2x}{\cancel{3}}$

$u' - u = 2x - 1$

23: Cont.

$u' - u = 2x - 1 \quad ; \quad p = -1$

$F(x) = e^{\int p\,dx} = e^{-x}$

$e^{-x}(u' - u) = e^{-x}(2x - 1)$

$\frac{d}{dx}(u e^{-x}) = 2x e^{-x} - e^{-x}$

$u e^{-x} = \underbrace{\int 2x e^{-x}\,dx}_{1} \underbrace{- \int e^{-x}\,dx}_{2} + C$

$1 = 2\int x e^{-x}\,dx = 2\left(-x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^{-x}dx \to v = \frac{e^{-x}}{-1}$

$= 2(-x e^{-x} - e^{-x})$

$= -2x e^{-x} - 2e^{-x}$

$2 = -\int e^{-x}\,dx = e^{-x}$

$\therefore \quad u e^{-x} = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} + C$

$u e^{-x} = -2x e^{-x} - e^{-x} + C$

$// \; u = -2x - 1 + C e^{x}$

$y^{-3} = C e^{x} - 2x - 1 \implies \boxed{y = (C e^{x} - 2x - 1)^{-\frac{1}{3}}}$

24. $y' + xy = xy^{-1}$ ∴ $\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^a \\ \therefore\ p = x,\ q = x,\ a = -1 \\ \underline{\underline{u}} = y^{1-a} = \underline{\underline{y^2}} \\ \therefore\ u' + (1-a)pu = (1-a)q \end{cases}$

$$\therefore\ u' + 2xu = 2x$$

$$p = 2x \quad \therefore\ F = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore\ \underbrace{e^{x^2}(u' + 2xu)} = e^{x^2}2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(ue^{x^2}\right) = 2x\,e^{x^2}$$

$$ue^{x^2} = \int 2x\,e^{x^2}dx + C$$

$$ue^{x^2} = e^{x^2} + C$$

$$\therefore\ \boxed{u = 1 + Ce^{-x^2}}$$

$$\boxed{y^2 = 1 + Ce^{-x^2}}$$