

Cálculo A

Funções 2 - Função injetiva, sobrejetiva, bijetiva; função par, ímpar

Esboce o gráfico da f determinando seu domínio e imagem [questões 1 - 16].

1. $f(x) = -4x + 3$

2. $f(x) = 4x - 3$

3. $f(x) = -3$

4. $f(x) = 3$

5. $f(x) = 4 - x^2$

6. $f(x) = -(4 - x^2)$

7. $f(x) = |x - 4|$

8. $f(x) = |x| - 4$

9. $f(x) = \frac{x}{|x|}$

10. $f(x) = x + |x|$

11.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

12.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ 0 & \text{se } x \text{ não é inteiro} \end{cases}$$

13.

$$f(x) = \begin{cases} -5 & \text{se } x < -5 \\ x & \text{se } -5 \leq x \leq 5 \\ 5 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

14.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

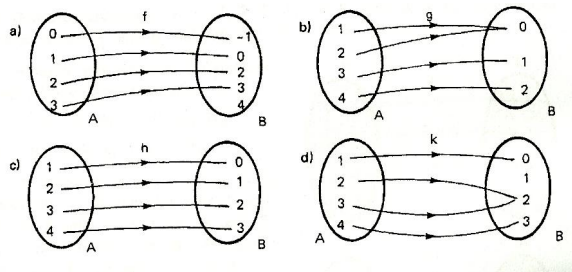
15.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } |x| < 1 \\ 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

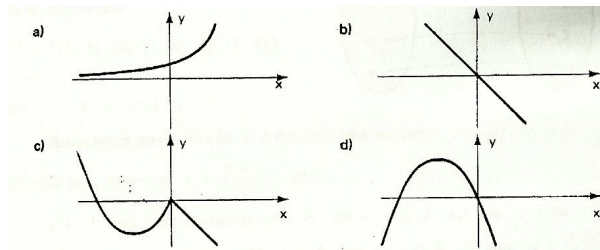
16.

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{se } 1 < x < 2 \\ x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

17. Verifique em cada caso (a), (b), (c), (d) se a função $A \rightarrow B$ é injetiva, ou sobrejetiva, ou bijetiva.



18. A partir do gráfico, verifique se a função é injetiva, sobrejetiva, ou bijetiva (assuma o contradomínio de cada função como sendo \mathbb{R}).



19. Classifique as funções seguintes em

(I) injetiva (II) sobrejetiva (III) bijetiva (IV) não é sobrejetiva nem injetiva ¹

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - x^2$

¹Nesta questão, tente usar os critérios analíticos de injetividade e sobrejetividade, i.e.

(i) $f : X \rightarrow Y$ é injetiva se $\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

(ii) $f : X \rightarrow Y$ **não** é injetiva se $\exists a, b \in X, a \neq b$ com $f(a) = f(b)$.

(iii) f é sobrejetiva se $\forall b \in Y, \exists a \in X$ tal que se tem $f(a) = b$.

(iv) $f : X \rightarrow Y$ **não** é sobrejetiva se $\exists b \in Y$ tal que $\nexists x \in X$ satisfazendo $f(x) = b$.

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = |x - 1|$

(d) $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $m(x) = 3x + 2$

(e) $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n(x) \equiv \llbracket x \rrbracket$

(Obs: $\llbracket x \rrbracket :=$ maior inteiro menor ou igual a x)

(f) $p : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $p(x) = \frac{1}{x}$

(g) $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = x^3$

(h) $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = |x|(x - 1)$

20. Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ seja sobrejetiva.

21. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ de modo que a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 2x^2 - 3x + 4$ seja injetiva.

22. Classifique as funções a seguir em

(I) injetiva (II) sobrejetiva (III) bijetiva (IV) não é sobrejetiva nem injetiva

(Sugestão: Faça a análise a partir do gráfico de cada função)

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

(d) $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(e) $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(f) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \llbracket x \rrbracket & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

(Obs: $\llbracket x \rrbracket :=$ maior inteiro menor ou igual a x)

23. Os conjuntos A e B tem respectivamente \mathbf{m} e \mathbf{n} elementos. Considera-se uma função $f : A \rightarrow B$. Qual a condição sobre \mathbf{m} e \mathbf{n} para que f possa ser injetiva? E para f ser sobrejetiva? E para f ser bijetiva?
24. Quantas funções injetivas existem entre $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$?
25. Quantas funções sobrejetivas existem entre $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$?

Classifique as funções a seguir em (I) par, (II) ímpar ou (III) sem paridade [questões 26 - 35].

26. $f(x) = 3x^3 - 4x$

27. $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$

28. $f(x) = 9 - 5x^2$

29. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$

30. $f(x) = 2$

31. $f(x) = 2x^3 + x^2$

32. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

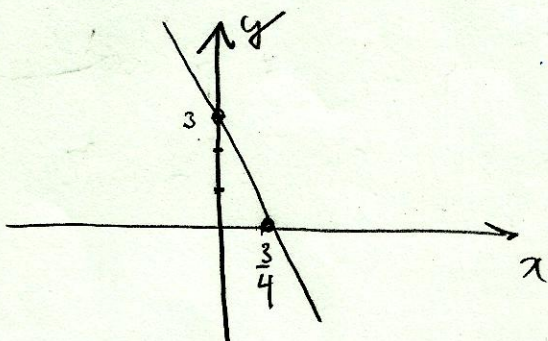
33. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

34. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

35. $f(x) = |x| + 5$

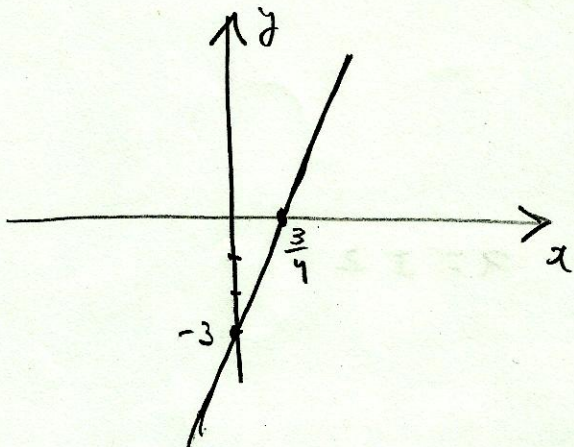
Lista 2

1. $f(x) = -4x + 3$



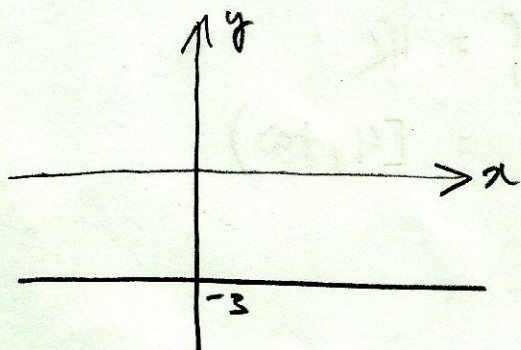
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2. $f(x) = 4x - 3$



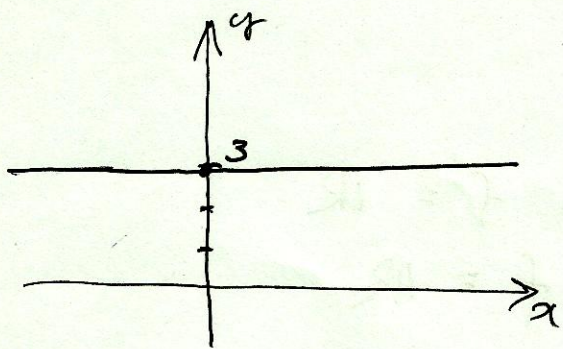
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

3. $f(x) = -3$



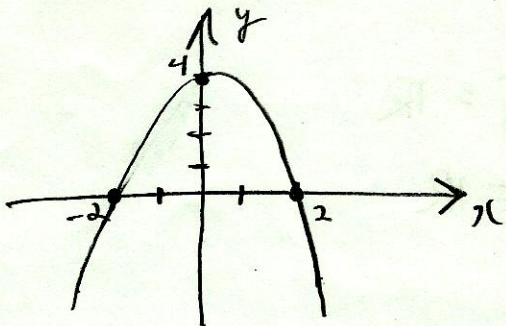
$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{-3\} \end{array} \right\}$$

4. $f(x) = 3$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{3\} \end{array} \right\}$$

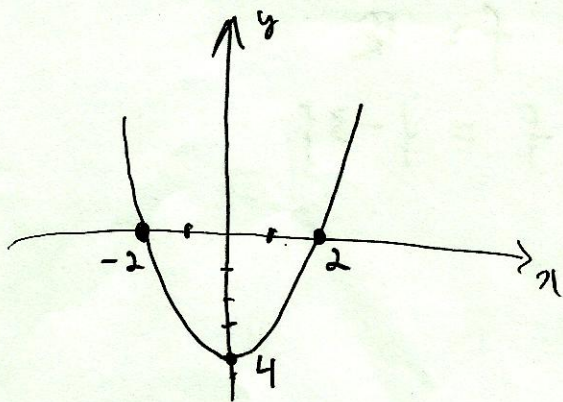
5. $f(x) = 4 - x^2$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (-\infty, 4] \end{array} \right\}$$

$$4 - x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 4 \quad \therefore \quad x = \pm 2$$

6. $f(x) = -(4 - x^2) = -4 + x^2$

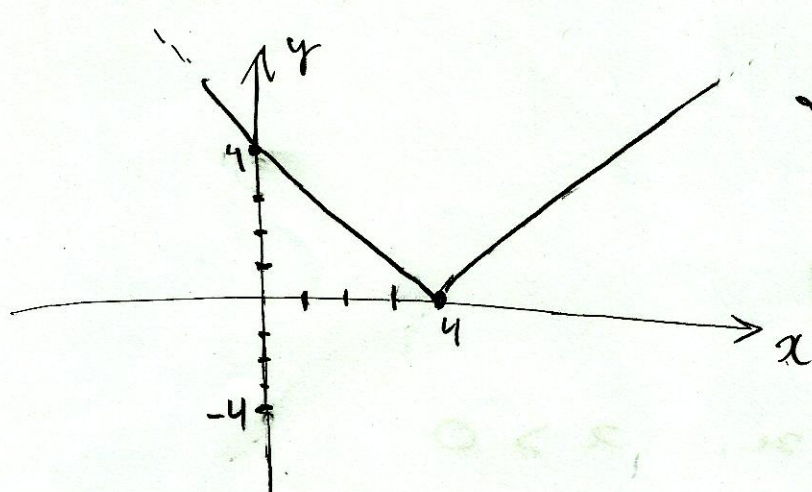


$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [4, +\infty) \end{array} \right\}$$

$$7. f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{re } x-4 > 0 \therefore x > 4 \\ 0 & \text{re } x-4 = 0 \therefore x = 4 \\ -(x-4) & \text{re } x-4 < 0 \therefore x < 4 \end{cases}$$

i.e.

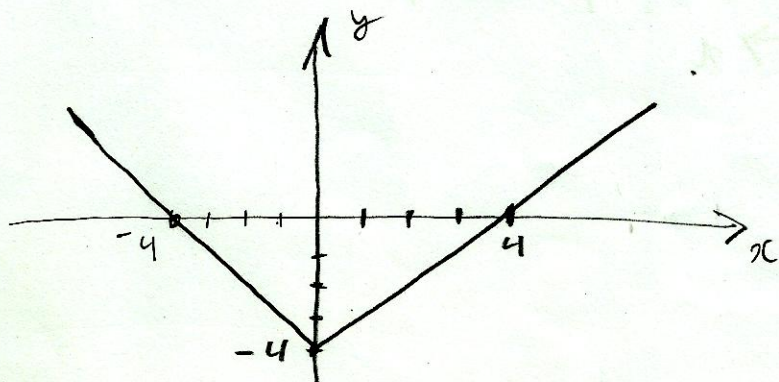
$$f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{re } x > 4 \\ 0 & \text{re } x = 4 \\ -x+4 & \text{re } x < 4 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [0, +\infty) \end{array} \right\}$$

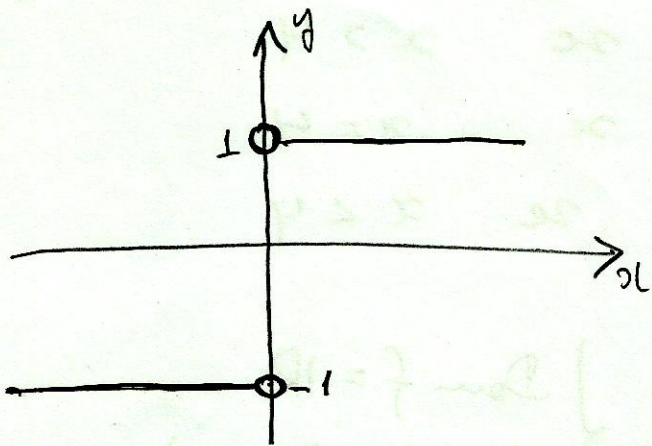
$$8. f(x) = |x| - 4$$

$$|x| - 4 = \begin{cases} x-4 & \text{re } x > 0 \\ -4 & \text{re } x = 0 \\ -x-4 & \text{re } x < 0 \end{cases}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [-4, +\infty) \end{array} \right\}$$

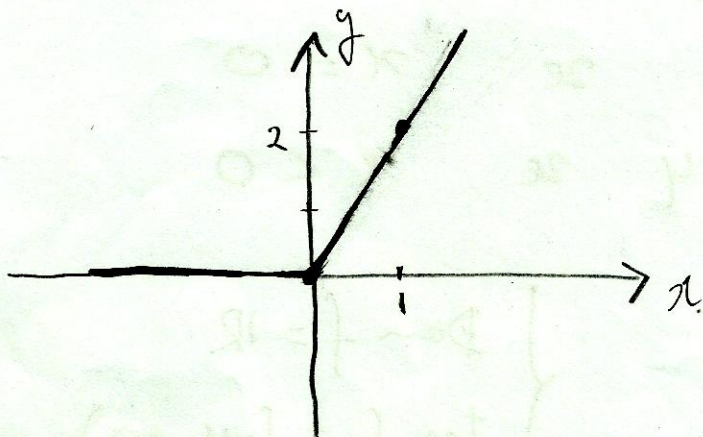
9. $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{Im } f = \{-1, 1\} \end{cases}$

10. $f(x) = x + |x|$

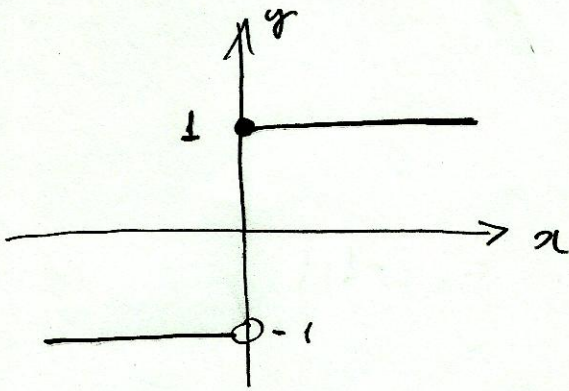
$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [0, +\infty) \end{cases}$

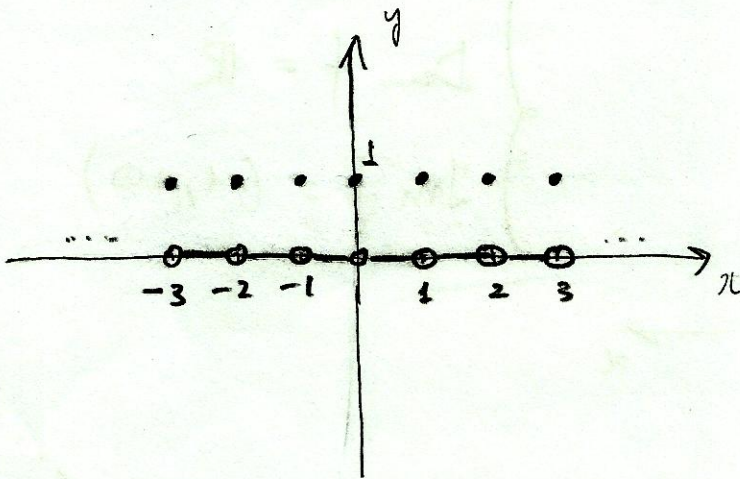
11.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



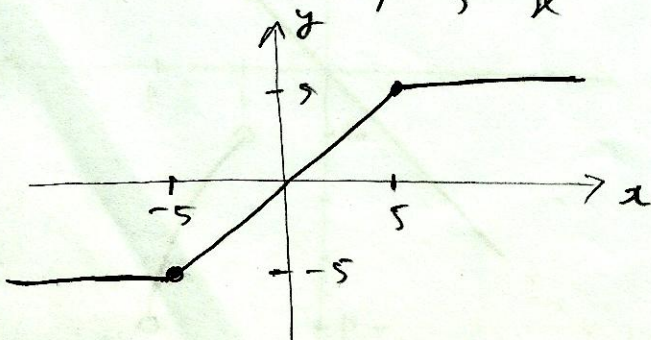
$$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{-1, 1\} \end{cases}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

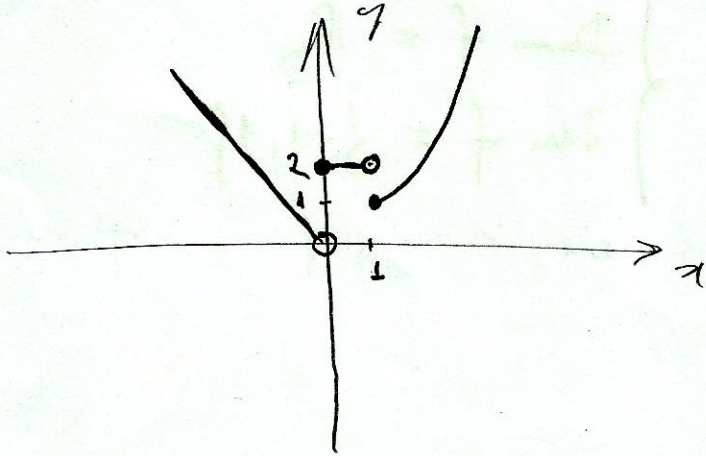


$$\begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = \{0, 1\} \end{cases}$$

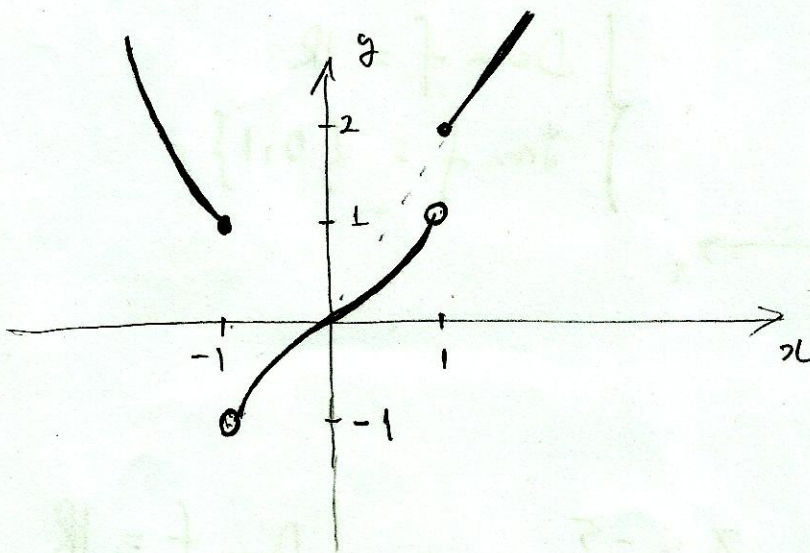
$$13. \quad f(x) = \begin{cases} -5 & x < -5 \\ x & -5 \leq x \leq 5 \\ 5 & x > 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = [-5, 5] \end{cases}$$



$$14. \quad f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (0, +\infty) \end{array} \right\}$$

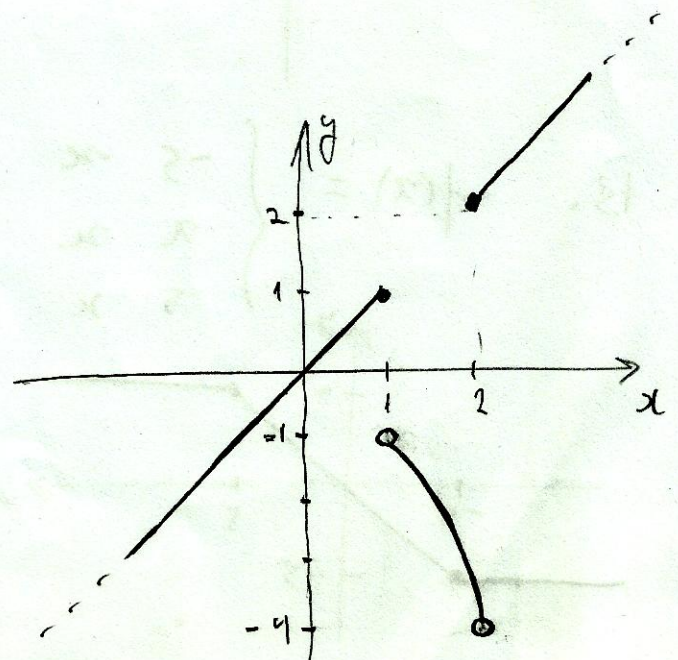


$$15. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ x^3 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dom } f = \mathbb{R} \\ \text{Im } f = (-1, +\infty) \end{array} \right\}$$



$$16. \quad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ -x^2 & 1 < x < 2 \\ x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom } g = \mathbb{R} \\ \text{Im } g = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \end{array} \right\}$$



17. a) f é injetiva c) h é bijetiva
b) g é sobrejetiva d) k não é nem injetiva
nem sobrejetiva

18. a) injetiva c) sobrejetiva
b) bijetiva d) não é nem injetiva
nem sobrejetiva

19. a) bijetiva e) sobrejetiva
b) não é nem injetiva
nem sobrejetiva f) bijetiva
c) sobrejetiva g) bijetiva
d) injetiva h) sobrejetiva

20) $b = 2$

21) $a = \frac{3}{4}$

- 22) a) bijetiva d) sobrejetiva
b) sobrejetiva e) sobrejetiva
c) injetiva f) sobrejetiva

23. f injetiva se $m \leq n$
 f sobrejetiva se $n \leq m$; f bijetiva se $m = n$

24. 12

25. 6

26. ímpar

27. par

28. par

29. ímpar

30. par

31. sem paridade

32. sem paridade

33. par

34. sem paridade

35. par