Cálculo A

Extremos de uma função

Use o teste da derivada primeira para determinar os extremos locais das funções a seguir [Questões (1-5)]

1. $f(x) = x^{4/3}$
2. $f(x) = \frac{10+6x-x^2}{6}$
3. $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$
4. $f(x) = (x^2-1)^{3/5}$
5. $f(x) = x^{2/3}$

Use o teste da derivada segunda para determinar os extremos locais das funções a seguir [Questões (6-9)]

6. $f(x) = 4x^2 - x^4$
7. $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$
8. $f(t) = \sin t + \cos t$
9. $f(t) = t + \cos 2t$

Determine os intervalos onde a função é crescente ou decrescente [Questões (10-14)]

10. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
11. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$
12. $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
13. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
14. $f(t) = 2\cos t - t$

Determine os intervalos onde o gráfico da função é côncavo para cima, e aqueles intervalos onde o gráfico é côncavo para baixo [Questões (15-18)]

15. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x$
16. $f(x) = x^3 + 8$
17. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
18. $f(x) = x\sqrt{x-1}$

Encontre os pontos de inflexão da função [Questões (19-22)]

19. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$
20. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
21. $f(x) = \frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{3}{5}x^{5/3}$
22. $f(x) = x^{5/3}$

Encontre, caso existam, os valores extremos absolutos (i.e. máximo absoluto e mínimo absoluto) da função no intervalo dado e determine em que pontos desse intervalo os extremos absolutos ocorrem [Questões (23-31)] [1]

23. $f(x) = x^4,\ [-2,4]$
24. $f(x) = x^2 - x,\ [1,2]$
25. $g(x) = x^2 + 4x - 5,\ [-4,-3]$
26. $k(x) = (x-2)^3,\ (-\infty,\infty)$
27. $f(x) = |x|^3,\ (-\infty,\infty)$
28. $f(t) = \cos t,\ [-2\pi, 2\pi]$
29. $f(x) = \sqrt{|x|},\ (-2,2)$
30. $f(x) = 2x^2 + \frac{4000}{x},\ [4,20]$
31. $f(x) = -3x^{2/3},\ [-1,1]$

Faça um esboço do gráfico das funções abaixo, indicando, caso existam, os extremos locais, pontos de inflexão, e interseções com os eixos coordenados [Questões (32-41)]

32. $f(x) = x^3 + 1$
33. $f(x) = -2 + 3x - x^3$
34. $f(x) = x^3 + x$
35. $f(x) = 64x^2 - 16x$
36. $f(x) = \frac{6x^5+20x^3-90x}{32}$
37. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2-7)$
38. $f(x) = \frac{x^{2/3}(x+40)}{4}$
39. $f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$

---

[1] Note que nos casos em que f é contínua e está definida em um intervalo fechado sabe-se que f terá um máximo e um mínimo absoluto neste intervalo. Se f for contínua em um intervalo aberto, e.g. nas questões 26, 27 e 28, como se deve proceder?

40. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

41. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Respostas:

1. $f(0) = 0$ mínimo local
2. $f(3) = 19/6$ máximo local
3. $f(1) = -2$ mínimo local
4. $f(0) = -1$ mínimo local
5. $f(0) = 0$ mínimo local

6. $f(0) = 0$ mínimo local
$f(\sqrt{2}) = 4$ máximo local
$f(-\sqrt{2}) = 4$ máximo local

7. $f(3/8) = -7/16$ máximo local

8. $f(\frac{\pi}{4} + 2n\pi) = \sqrt{2}$ máximo local $(n \in Z)$
$f(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi) = -\sqrt{2}$ mínimo local $(n \in Z)$

9. $f(\frac{\pi}{12} + n\pi) = \frac{\pi}{12} + n\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ máximo local
$f(\frac{5\pi}{12} + n\pi) = \frac{5\pi}{12} + n\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ mínimo local

10. crescente em $(-\infty, \infty)$
11. crescente em $[3/2, \infty)$
decrescente em $(-\infty, 3/2]$
12. crescente em $[-4, 0]$
decrescente em $[0, 4]$
13. crescente em $(-\infty, 0]$
decrescente em $[0, \infty)$
14. crescente em $[\frac{7\pi}{6}+2n\pi, \frac{11\pi}{6}+2n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$
decrescente em $[-\frac{\pi}{6}+2n\pi, \frac{7\pi}{6}+2n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$

15. côncava para baixo em $(-\infty, \infty)$
16. côncava para cima em $(0, \infty)$
côncava para baixo em $(-\infty, 0)$
17. côncava para cima em $(0, \infty)$
côncava para baixo em $(-\infty, 0)$
18. côncava para cima em $(4/3, \infty)$
côncava para baixo $(1, 4/3)$

19. $(-1, 9)$
20. $(0, 0); (-2/3, -16/27)$
21. $(-\frac{2}{9}, \frac{4}{5}(\frac{2}{9})^{2/3})$

22. $(0, 0)$
23. $f(4) = 256$ é máximo absoluto da f
$f(0) = 0$ é mínimo absoluto da f

24. $f(2) = 2$ é máximo absoluto da f
$f(1) = 0$ é mínimo absoluto da f

25. $g(-4) = -5$ é máximo absoluto da g
$g(-3) = -8$ é mínimo absoluto da g

26. k não possui extremo

27. f não possui máximo absoluto
$f(0) = 0$ é mínimo absoluto da f

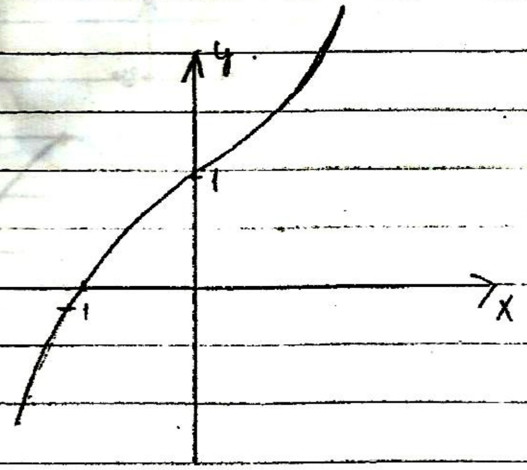
28. $f(-2\pi) = f(2\pi) = f(0) = 1$ é máximo absoluto da f
$f(\pi) = f(-\pi) = -1$ é mínimo absoluto da f

29. f não possui máximo absoluto
$f(0) = 0$ é mínimo absoluto da f

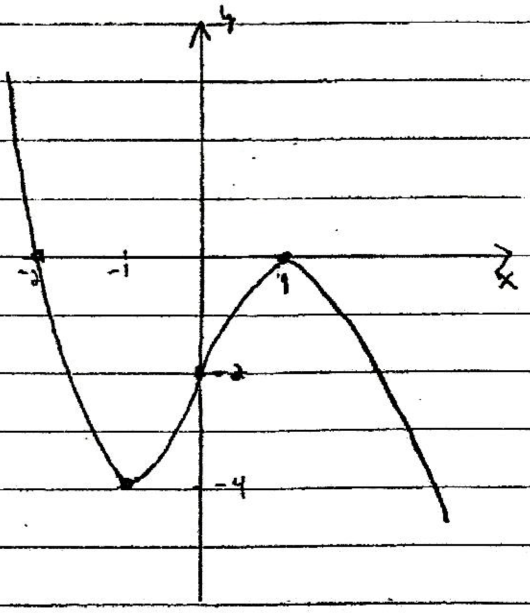
30. $f(4) = 1032$ é máximo absoluto da f
$f(10) = 600$ é mínimo absoluto da f

31. $f(0) = 0$ é máximo absoluto da f
$f(\pm 1) = -3$ é mínimo absoluto da f

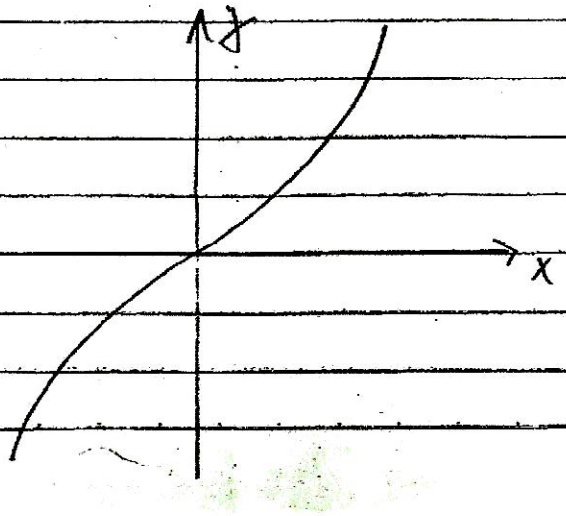
32.



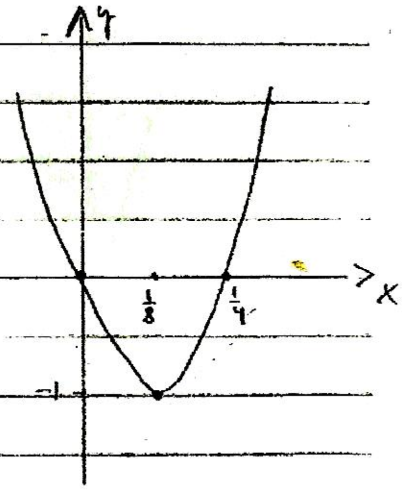
33



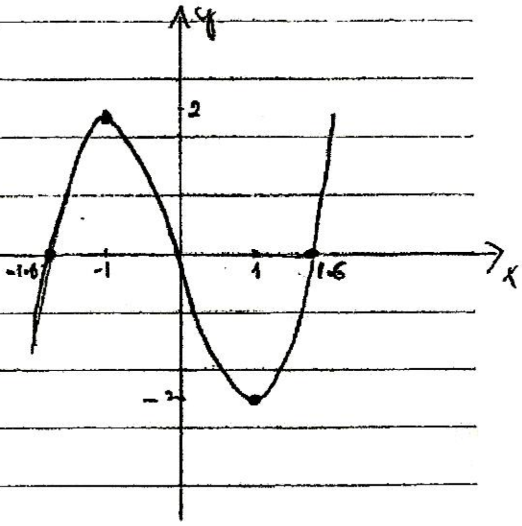
34.



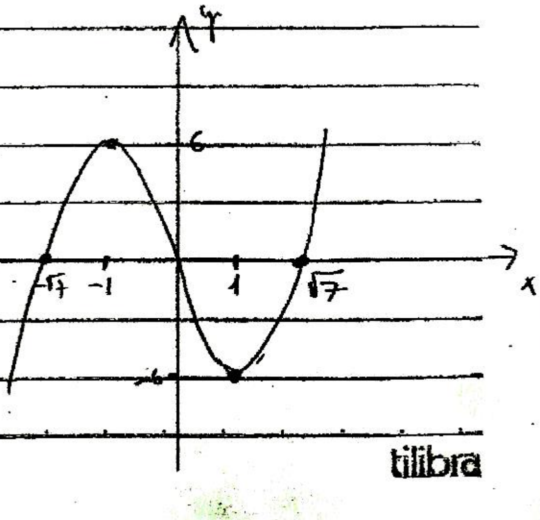
35



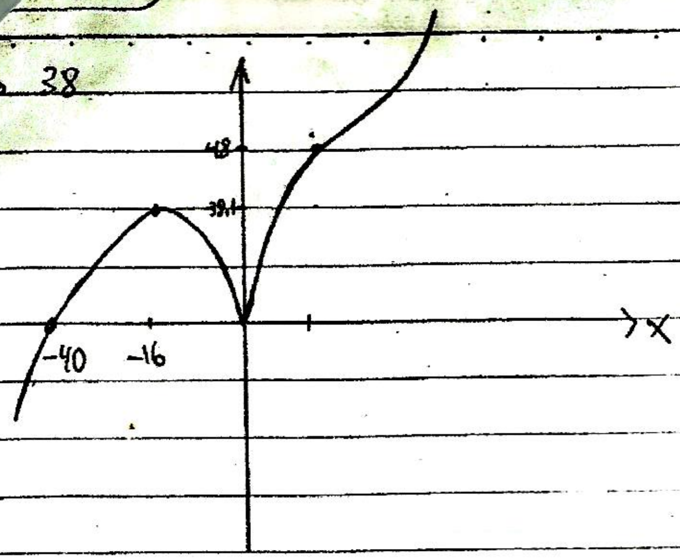
36.



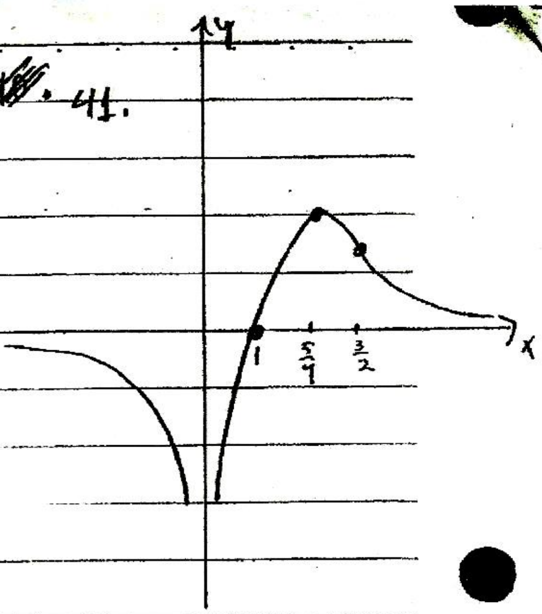
37



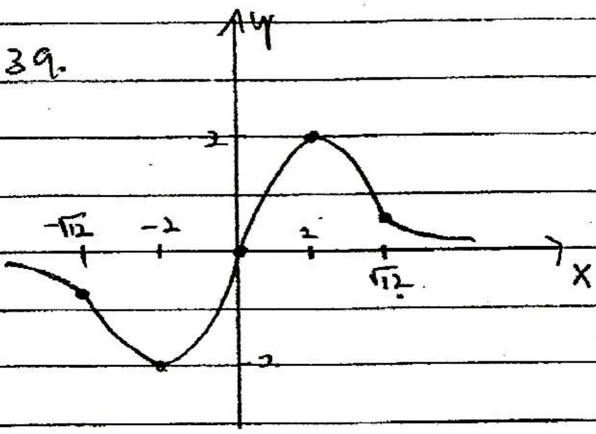
38



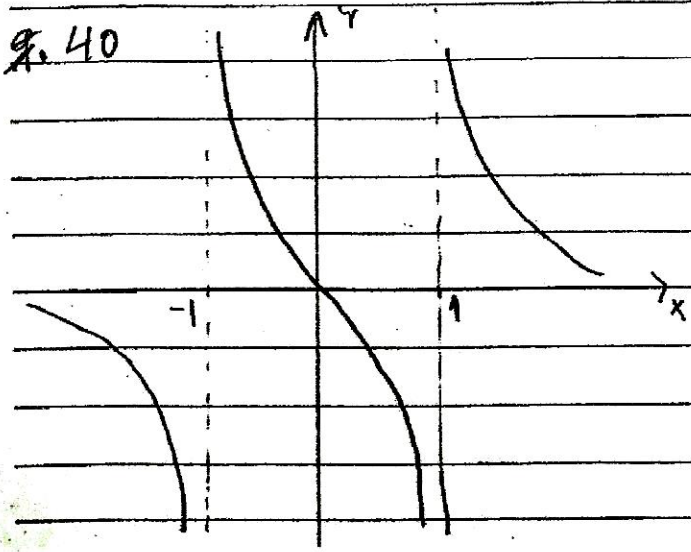
41.



39.



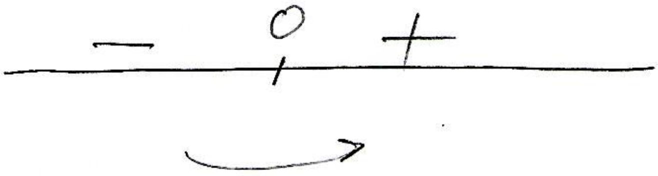
40



1. $f(x) = x^{4/3}$

$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3}$ ∴ $f'(x) = 0$ ∴ $\frac{4}{3} x^{1/3} = 0$

∴ $x = 0$



$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3}$

$f(0) = 0$ é mínimo local

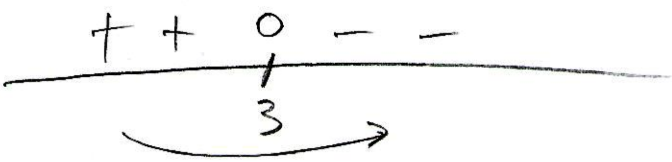
---

2. $f(x) = \frac{10 + 6x - x^2}{6}$

$f'(x) = 1 - \frac{x}{3}$

$f'(x) = 0$ ∴ $1 - \frac{x}{3} = 0$ ∴ $\frac{x}{3} = 1$

∴ $x = 3$



$f'(x) = 1 - \frac{x}{3}$

$f(3) = \frac{10 + 18 - 9}{6} = \frac{19}{6}$

$f(3) = \frac{19}{6}$ é máximo local da f

3. $f(x) = \sqrt{x}\,(x-3)$; $\text{Dom} f = [0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}$$

$$= \frac{(x-3) + 2x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f'(x) \nexists \Rightarrow x = 0 \rightarrow \text{é extremo do intervalo, logo não pode ser associado a extremo local da } f \end{cases}$$

	0		1		
		− −	0	+ + +	$(x-1)$
	∄ 0	+ +		+ +	$\sqrt{x}$
	∄	−	0	+	$\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} = f'(x)$

$f(1) = -2$ é mínimo local da f

4. $f(x) = (x^2-1)^{3/5}$; Dom $f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3}{5}(x^2-1)^{-2/5}\, 2x$$

$$= \frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt[5]{(x^2-1)^2}}$$

$f'(x) = 0$: $\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt[5]{(x^2-1)^2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$

$f'(x) \nexists$: $x = \pm 1$;

	-1		0		1		
-	-	-	0	+	+	+	x
+	0	+	+	+	0	+	$\underbrace{\sqrt[5]{(x^2-1)^2}}_{\text{sempre positivo}}$
-	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+	$\frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt[5]{(x^2-1)^2}} = f'(x)$

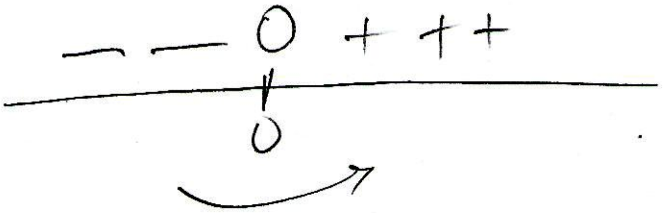
$f(0) = -1$ é mínimo local de f.

5. $f(x) = x^{2/3}$; Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = 0$: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow$ não é satisfeita

$f'(x) \nexists \Rightarrow x = 0$



$\sqrt[3]{x} \rightarrow$ determina o sinal de $f'(x)$

$f(0) = 0$ é mínimo local de f

6. $f(x) = 4x^2 - x^4$

$f'(x) = 8x - 4x^3$

$f'(x) = 0$: $8x - 4x^3 = 0$

$4x(2 - x^2) = 0$

$x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

$f''(x) = (8x - 4x^3)'$

$\therefore f''(x) = 8 - 12x^2$

$x = 0$: $f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ $f(0) = 0$ é mínimo local da f

---

$x = \sqrt{2}$: $f''(\sqrt{2}) = 8 - 12.2$

$= 8 - 24$

$= -16 < 0 \Rightarrow$ $f(\sqrt{2}) = 4$ é máximo local da f

$f(\sqrt{2}) = 4.2 - \sqrt{2}^4$

$= 8 - 4$

$= 4$

$x = -\sqrt{2}$: $f''(-\sqrt{2}) = -16 < 0 \Rightarrow$ $f(-\sqrt{2}) = 4$ é máximo local da f

7. $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

$f'(x) = -8x + 3$.

$f'(x) = 0 \;:\; -8x + 3 = 0$

$8x = 3 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{8}$

$f''(x) = -8$

$\therefore \; f''\left(\frac{3}{8}\right) = -8 < 0 \implies \left\{ \right.$ $f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{7}{16}$ é máximo local da f

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = -4 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{3}{8} - 1$$

$$= -\frac{9}{16} + \frac{9}{8} - 1$$

$$= \frac{\overbrace{-9 + 18}^{9} - 16}{16}$$

$$= \frac{-7}{16}$$

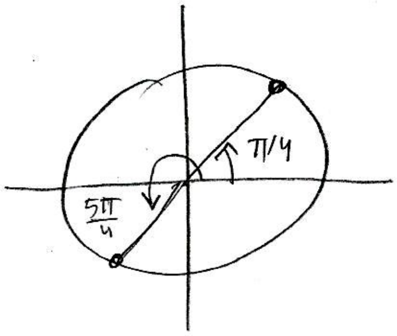
8.

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \quad ; \quad \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\therefore \quad \cos x = \operatorname{sen} x$$



$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f''(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)'$$

$$= -\operatorname{sen} x - \cos x$$

$\rightarrow$ $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$:

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0 \implies$$

$\implies$ $f\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \sqrt{2}$ é máximo local

$$f\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$$

$\rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$:

$$f''\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= -\underbrace{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)} - \underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$$

$\therefore$ $f\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) = -\sqrt{2}$ é mínimo local

$$f\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$$= \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

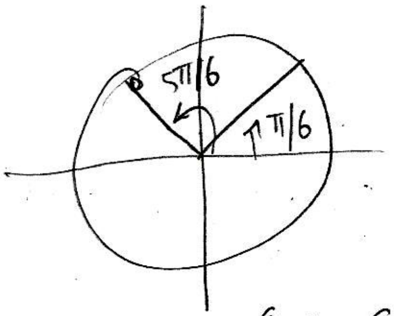
$$= -\sqrt{2}$$

9. $f(x) = x + \cos 2x$

$f'(x) = 1 - 2 \operatorname{sen} 2x$

$f'(x) = 0$: $1 - 2\operatorname{sen} 2x = 0$

$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ou ainda

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{12} + n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x) = (1 - 2\operatorname{sen} 2x)'$$

$$= -4\cos 2x$$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{12} + n\pi$:

$$f''\left(\frac{\pi}{12} + n\pi\right) = -4\cos 2\left(\frac{\pi}{12} + n\pi\right)$$

$$= -4\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)$$

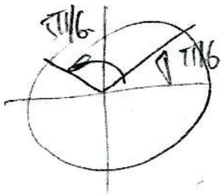
$$= -4\cos\frac{\pi}{6} = -4\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} < 0 \Longrightarrow$$

$f\left(\frac{\pi}{12}+2n\pi\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+2n\pi$ é máximo local da f

$$f\left(\frac{\pi}{12}+2n\pi\right)=\frac{\pi}{12}+2n\pi+\cos 2\left(\frac{\pi}{12}+2n\pi\right)$$
$$=\frac{\pi}{12}+2n\pi+\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\pi}{12}+2n\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow x=\frac{5\pi}{12}+n\pi$

$$f''\left(\frac{5\pi}{12}+n\pi\right)=-4\cos 2\left(\frac{5\pi}{12}+n\pi\right)$$
$$=-4\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$$
$$=-4\cos\frac{5\pi}{6}$$
$$=-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}>0\Longrightarrow$$



$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}$
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow f\left(\frac{5\pi}{12}+n\pi\right)=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}+n\pi$ é mínimo local da f

$$f\left(\frac{5\pi}{12}+n\pi\right)=\frac{5\pi}{12}+n\pi+\cos\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$$
$$=\frac{5\pi}{12}+n\pi+\cos\frac{5\pi}{6}$$
$$=\frac{5\pi}{12}+n\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$+ \ + \ + \ +$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \rightarrow \nexists \ x \text{ real}$$

$\therefore \ 3x^2 - 2x + 1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$

$f'(x) > 0 \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$

$\underline{f(x) \text{ é crescente } \forall x \in \mathbb{R}}$

11. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$= 2x^2 \underbrace{(2x - 3)}_{\text{determina o sinal de } f'(x)}$

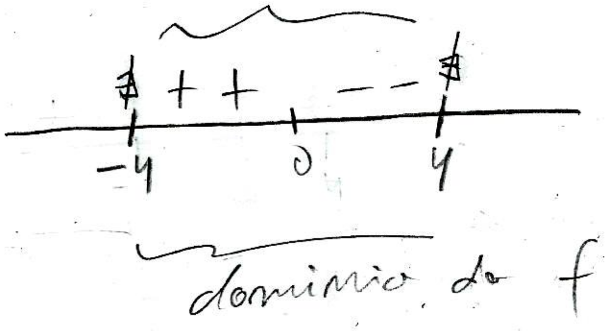
$- \; - \; \underset{\frac{3}{2}}{\overset{0}{|}} \; + \; +$ $\qquad f'(x) = 2x^2(2x-3)$

$$\begin{cases} f(x) \text{ é decrescente em } (-\infty, \frac{3}{2}] \\ f(x) \text{ é crescente em } [\frac{3}{2}, +\infty) \end{cases}$$

12. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; Dom $f = [-4, 4]$

$$f'(x) = \frac{1(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{\boxed{-x} \xrightarrow{} \text{determina o sinal de } f'(x)}{\underbrace{\sqrt{16-x^2}}_{\text{sempre positivo}}}$$

sinal de $-x$ para $x \in [-4, 4]$



$$f'(x) = \frac{\boxed{-x}}{\sqrt{16-x^2}}$$

f é crescente em $[-4, 0]$

f é decrescente em $[0, 4]$

13. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; Dom $f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left((x^2+1)^{-1}\right)' = -1\,(x^2+1)^{-2}(2x)$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow \text{determina o sinal de } f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{\boxed{-2x}}{(x^2+1)^2}$$

$\begin{cases} f(x) \text{ é crescente em } (-\infty, 0] \\ f(x) \text{ é decrescente em } [0, \infty) \end{cases}$

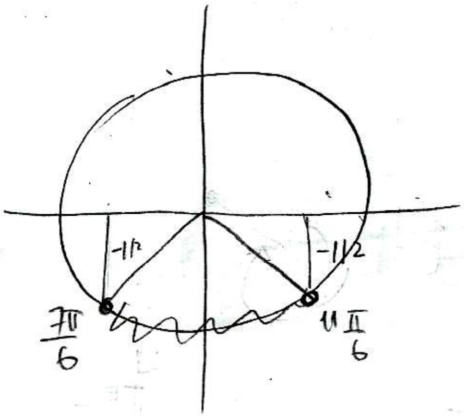
14. $f(x) = 2\cos x - x$

$f'(x) = -2\sin x - 1$

$f'(x) > 0$: $-2\sin x - 1 > 0$

$-2\sin x > 1 \quad \downarrow \div(-2)$

$\sin x < -\frac{1}{2}$



$\Rightarrow \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$

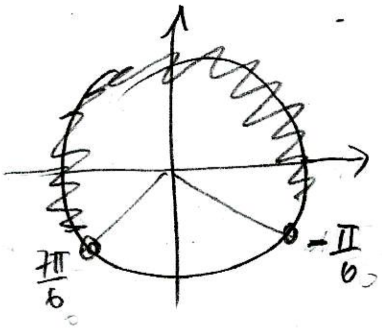
f(x) é crescente em $\left[\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi\right]$; $n \in \mathbb{Z}$

$f'(x) < 0$: $-2\sin x - 1 < 0$

$-2\sin x < 1$

$\sin x > 1/2$

$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$



f(x) é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right]$; $n \in \mathbb{Z}$

15.

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x$$

$$f'(x) = -3x + 1$$

$$f''(x) = -3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

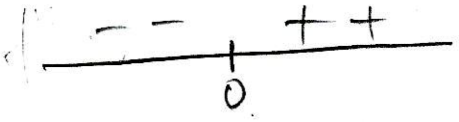
$\therefore$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ tem concavidade para baixo} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

---

16. $f(x) = x^3 + 8$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$



$f''(x) = 6x$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ tem concavidade para baixo em } (-\infty, 0) \\ f(x) \text{ tem concavidade para cima em } (0, +\infty) \end{array} \right.$

17. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

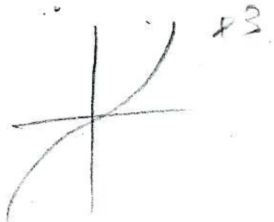
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$- \; - \; 0 \; + \; + \; +$

0

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$



f(x) tem concavidade para baixo em $(-\infty, 0)$

f(x) tem concavidade para cima em $(0, +\infty)$

---

18. $f(x) = x\sqrt{x-1}$ → Dom f = $[1, +\infty)$

$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1x}{2\sqrt{x-1}}$

$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)'$

$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot\sqrt{x-1} - x\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}\right)$

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2(x-1) - x}{\underline{2\sqrt{x-1}\,(x-1)}}\right)$$

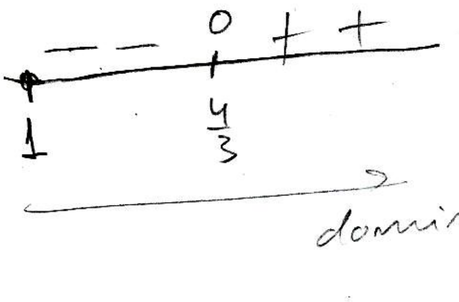
$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \left(\frac{2x-2-x}{4\underline{(x-1)}^{3/2}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \left(\frac{x-2}{4(x-1)^{3/2}}\right)}$$

$$= \frac{2(x-1) + x-2}{4(x-1)^{3/2}}$$

$$= \frac{2x-2+x-2}{4(x-1)^{3/2}}$$

$$= \frac{\boxed{3x-4}}{\underbrace{4(x-1)^{3/2}}_{\text{positivo}}}$$ → determina o sinal de $f''(x)$



$3x-4$ → sinal de $f''(x)$

$f(x)$ tem concavidade para baixo em $(1, \frac{4}{3})$

$f(x)$ tem concavidade para cima em $(\frac{4}{3}, +\infty)$

19. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f''(x) = 6x + 6$

$$- \; - \; \underset{-1}{\overset{0}{|}} \; + \; + \; + \qquad f''(x) = 6x+6$$

$\longrightarrow$

Muda concavidade

$x = -1$, $f(-1) = 9$

$\therefore$ $(-1,9)$ é pto. de inflexão

20.

$f(x) = 3x^4 + 4x^3$

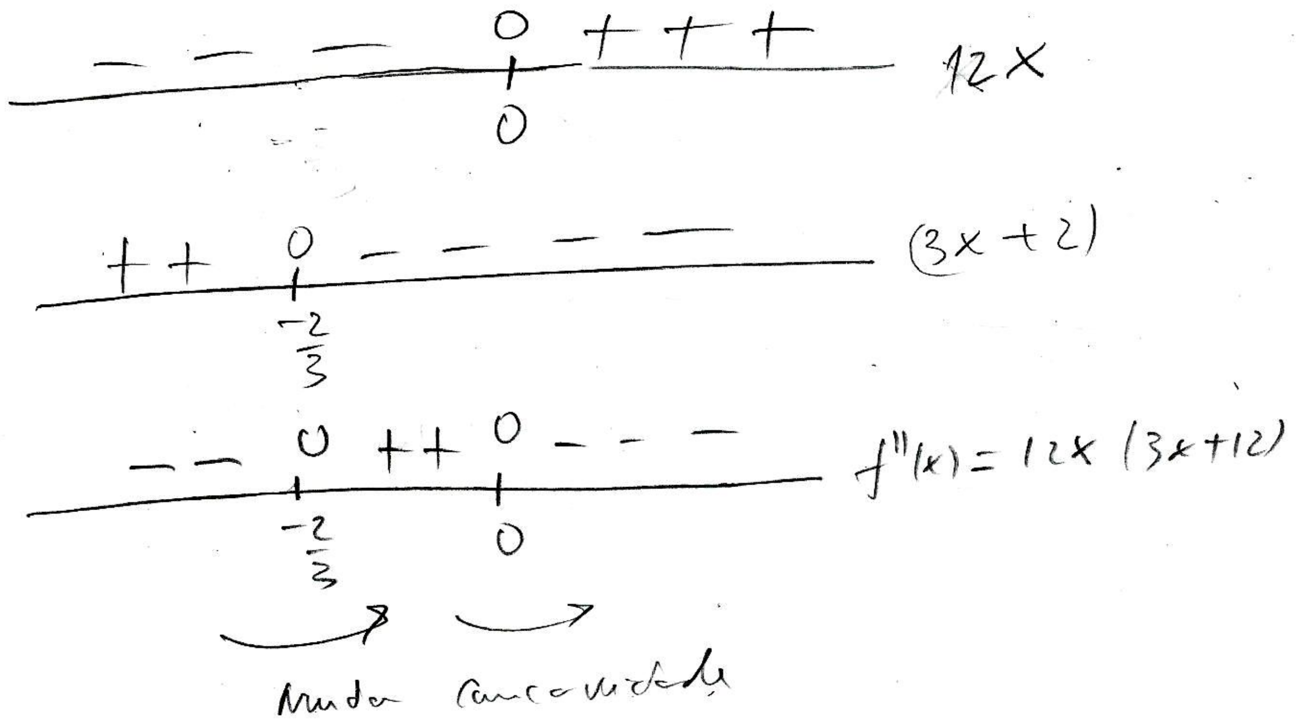
$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$

$f''(x) = 36x^2 + 24x$

$\longrightarrow f''(x) = 12x(3x + 2)$

$f''(x) = 0$: $12x(3x+2) = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$



$x = -\frac{2}{3}$, $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27}$ ∴ $(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$ é pto. de inflexão

$x = 0$, $f(0) 0$ ∴ $(0,0)$ é pto. de inflexão

21. $f(x) = \frac{2}{3} x^{2/3} - \frac{3}{5} x^{5/3}$

$$f'(x) = \frac{4}{9} x^{-1/3} - x^{2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{27} x^{-4/3} - \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$= \frac{-4}{27} \frac{1}{x^{4/3}} - \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$= -\frac{2}{3} \left[\underbrace{\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{1}{x^{1/3}}} \right]$$

$$= -\frac{2}{3} \left[\frac{2+9x}{\boxed{x^{4/3}}} \right]$$

→ sempre positivo.

$- - - - - -$ $\quad -2/3$

$- - - \overset{0}{} + + +$ $\quad 2+9x$
$-\frac{2}{9}$

$+ + + + \overset{0}{} + + +$ $\quad x^{4/3}$
0

$+ + \; 0 \; - \; \nexists \; - -$ $\quad f''(x) = -\frac{2}{3} \frac{(2+9x)}{x^{4/3}}$
$-\frac{2}{9} \qquad 0$

Muda concavidade

$x = -\frac{2}{9}$; $f(-\frac{2}{9}) = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{9}\right)^{2/3}$ ∴ $\left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{5}\left(\frac{2}{9}\right)^{2/3}\right)$ é pto. inflexão

22. $f(x) = x^{5/3}$

$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3}$

$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-1/3}$

$= \frac{10}{9\boxed{\sqrt[3]{x}}} \rightarrow$ determina o sinal de $f''(x)$

$-$ ∄ $+$

0

muda concavidade

$x = 0$, $f(0) = 0$ ∴ (0,0) é pto. de inflexão

23. $f(x) = x^4$; $[-2,4]$

Pontos críticos da f:

$f'(x) = 4x^3$

$f'(x) = 0$; $4x^3 = 0$ ∴ $\underline{\underline{x = 0}}$

$f'(x) \nexists$ → não se aplica

$f(-2) = (-2)^4 = 16$

$f(4) = 4^4 = 256$

X	$f(x) = x^4$
-2	16
4	256 → Máximo absoluto da f.
0	0 → Mínimo absoluto da f

∴ $f(4) = \underline{\underline{256}}$ é máximo absoluto da f

$f(0) = \underline{\underline{0}}$ é mínimo absoluto da f

24. $f(x) = x^2 - x$, $[1,2]$

Pontos críticos da f

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 0$: $2x - 1 = 0$ ∴ $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

$f'(x) \nexists$ → não se aplica

X	$f(x) = x^2 - x$
1	$f(1) = 0$
2	$f(2) = 2$ → Máximo
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ → Mínimo

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} f(2) = 2 \text{ é máximo absoluto da } f \\ f(1) = 0 \text{ é mínimo absoluto da } f \end{cases}$$

25.

$g(x) = x^2 + 4x - 5$; $[-4, -3]$

Pontos críticos da f

$g'(x) = 2x + 4$

$g'(x) = 0$: $2x + 4 = 0$ ∴ $\underline{\underline{x = -2}}$ → não está no intervalo $[-4, -3]$

$g'(x) \nexists$ → não se aplica

$g(-4) = 16 - 16 - 5 = -5$

$g(-3) = 9 - 12 - 5 = -8$

x	$g(x) = x^2 + 4x - 5$
-4	-5 → Máximo
-3	-8 → Mínimo

$g(-4) = -5$ é Máximo absoluto de g

$g(-3) = -8$ é Mínimo absoluto de g

26.

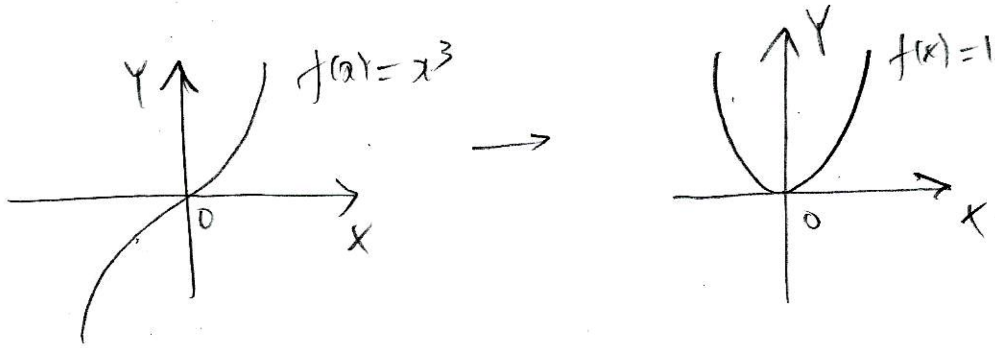
$k(x) = (x-2)^3$; $(-\infty, \infty)$

Vemos que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)^3 = -\infty \end{cases}$

Assim, $f(x)$ é ilimitada e <u>não admite nem máximo absoluto nem mínimo absoluto</u>.

27. $f(x) = |x|^3$, $(-\infty, +\infty)$

Temos



e então vemos que:

$\begin{cases} f(0)=0 \text{ é mínimo absoluto de } f \\ f \text{ não admite máximo absoluto} \end{cases}$

28. $f(x) = \cos x$; $[-2\pi, 2\pi]$

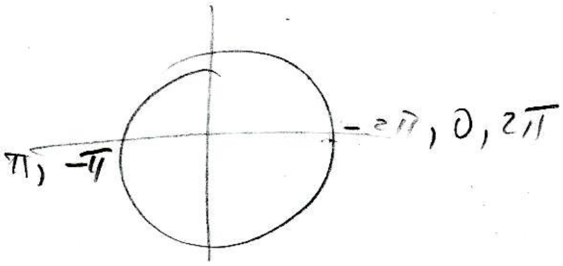
Pontos críticos de f

$f'(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0$: $-\sin x = 0$ $\therefore$ $x = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

Mas, $x \in [-2\pi, 2\pi]$, daí com $x = n\pi$ só temos as possibilidades

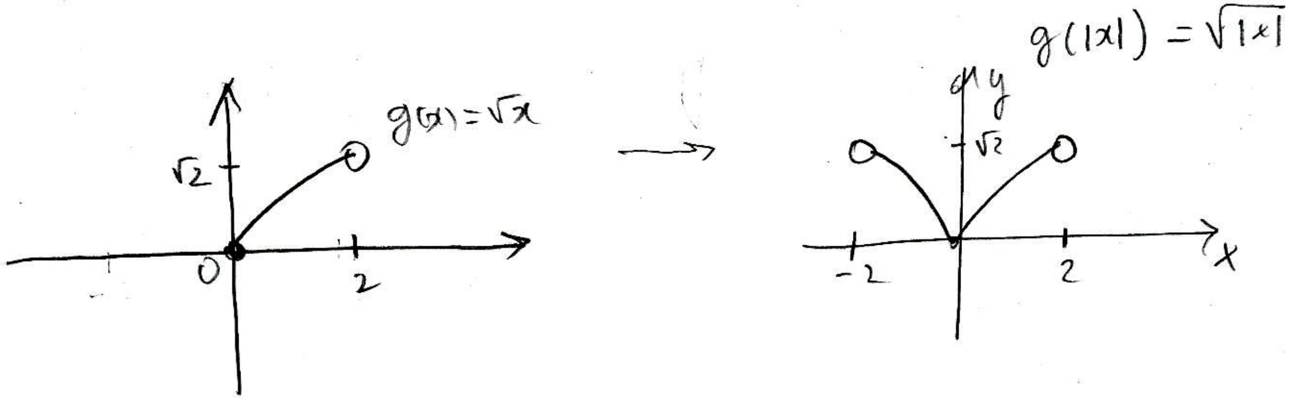
$\underline{x = -\pi}$, $\underline{x = 0}$, $\underline{x = \pi}$



x	$f(x) = \cos x$
-2π	1
2π	1
$-\pi$	-1
0	1
π	-1

$\begin{cases} 1 \text{ é Máximo absoluto de } f \\ -1 \text{ é Mínimo absoluto de } f \end{cases}$

29. $f(x) = \sqrt{|x|}$; $(-2,2)$



Vemos do gráfico que :

$$\begin{cases} f(0)=0 \text{ é mínimo absoluto de } f \\ f \text{ não admite máximo absoluto} \end{cases}$$

---

30. $f(x) = 2x^2 + \frac{4000}{x}$; $[4,20]$

Pontos críticos de f :

$$f'(x) = 4x - \frac{4000}{x^2}$$

$f'(x)=0$: $4x - \frac{4000}{x^2} = 0$

$$\frac{4x^3-4000}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 4x^3 - 4000 = 0$$

$$x^3 = 1000 \Rightarrow \underline{x = 10}$$

$f'(x) \nexists$: $4x - \frac{4000}{x^2}$ $\nexists \Longrightarrow \underline{\underline{x=0}}$

↳ está fora do intervalo

x	$f(x) = 2x^2 + \frac{4000}{x}$
4	1032 → Máximo
20	1000
10	600 → Mínimo

$f(4) = 2 \cdot 16 + \frac{4000}{4} = 32 + 1000 = 1032$

$f(20) = 2 \cdot 400 + \frac{\overset{2}{\cancel{400}}\cancel{0}}{\cancel{20}} = 800 + 200 = 1000$

$f(10) = 2 \cdot 100 + \frac{400\cancel{0}}{\cancel{10}} = 200 + 400 = 600$

$$\begin{cases} f(4) = 1032 \text{ é Máximo absoluto da } f \\ f(10) = 600 \text{ é Mínimo absoluto da } f \end{cases}$$

31. $f(x) = -3x^{2/3}$; $[-1,1]$

$f'(x) = -2x^{-1/3} = \frac{-2}{x^{1/3}}$

$f'(x) = 0$ → não se aplica

$f'(x) \nexists$; $\frac{-2}{x^{1/3}} \nexists \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$

x	$f(x) = -3x^{2/3}$
-1	-3
1	-3
0	0

$-1, 1$: -3 } Mínimo

0: 0 → Máximo

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \text{é Máximo absoluto da } f \\ f(1) = f(-1) = -3 & \text{é Mínimo absoluto da } f \end{cases}$$

32. $f(x) = x^3 + 1$

- interseção com eixos coordenados:

eixo x : $0 = x^3 + 1$, $x^3 = -1$, $\| x = -1 \|$

eixo y : $\| y = 1 \|$

- comportamento assintótico

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 + 1 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- pontos críticos

$f'(x) = 3x^2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = 6x$; $f''(0) = ?$

$$\left.\begin{aligned} f'(0-\delta) &= 3(-\delta)^2 = 3\delta^2 > 0 \\ f'(0+\delta) &= 3(\delta)^2 > 0 \end{aligned}\right\} \text{f' não muda de sinal}$$

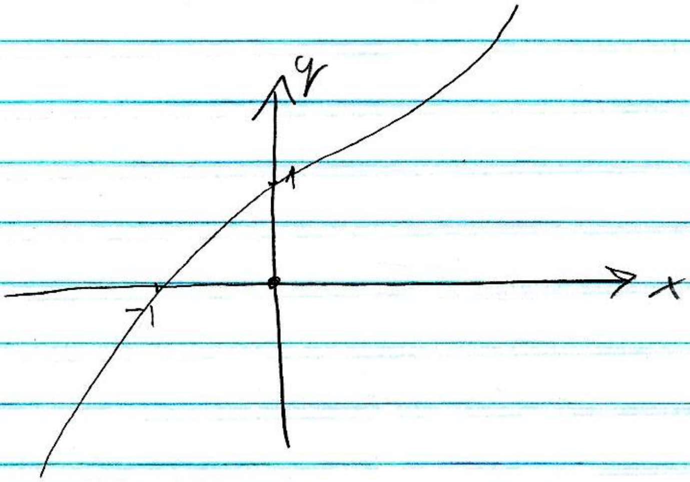
$x = 0$ não é extremo.

- Concavidade

$f''(x) = 6x$;

$f''(x) > 0 \implies x > 0$ → concavidade p/ cima

$f''(x) < 0 \implies x < 0$ → " " baixo



33. $f(x) = -2 + 3x - x^3$

- Interseção:

eixo y : $(0,-2)$

eixo x : $\underline{\underline{x=1}}$: $-2+3-1 = 0$

$$\begin{array}{l|l} -\cancel{x^3} + 3x - 2 & x-1 \\ \hline +\cancel{x^3} - x^2 & -x^2 - x + 2 \\ \hline -\cancel{x^2} + 3x - 2 & \\ +\cancel{x^2} - x & \\ \hline \quad 2x - 2 & \\ \quad -2x + 2 & \\ \hline \quad 0 \; 0 & \end{array}$$

$-x^3 + 3x - 2 = (x-1)(-x^2 - x + 2)$

$-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+8} \,/ {-2}$

$= \dfrac{1 \pm 3}{-2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow +1 \end{array}$

$(1,0)$, $(-2,0)$, $(1,0)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + 3x - x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(-\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^2} - 1 \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + 3x - x^3 = +\infty$

- pontos críticos

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$f'(x) = 0 = 3 - 3x^2 \implies x = \pm 1$

$f''(x) = -6x$: $f''(1) = -6 < 0 \rightarrow x = 1$ Máx. local

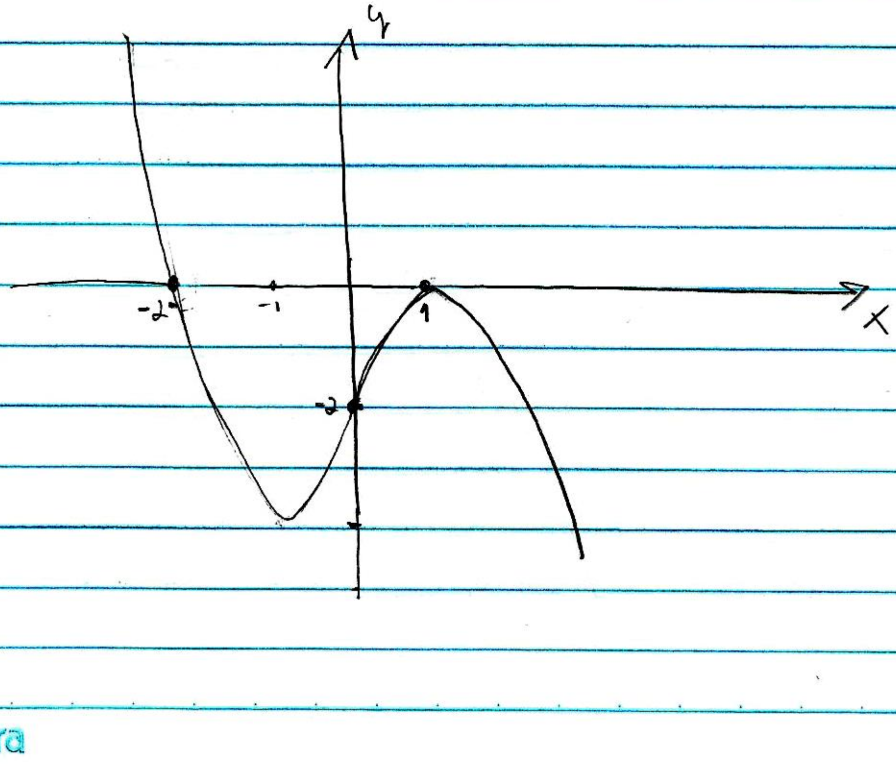
$f''(-1) = 6 > 0 \rightarrow x = -1$ Mim. local

- Concavidade

$f''(x) = -6x$

$f''(x) > 0 \rightarrow -6x > 0 \implies x < 0$: cima

$f''(x) < 0 \rightarrow -6x < 0 \implies x > 0$: p/ baixo



$f(1) = 0$ Max.

$f(-1) = -4$ Mim

34. $f(x) = x^3 + x$

- Intersecção com eixos

eixo y : $y = 0$; $(0,0)$

eixo x : $x^3 + x = 0$

$x(x^2+1) = 0 \Longrightarrow x = 0$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} x^3 + x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + x = -\infty \end{cases}$

- ponto crítico

$f'(x) = 3x^2 + 1$

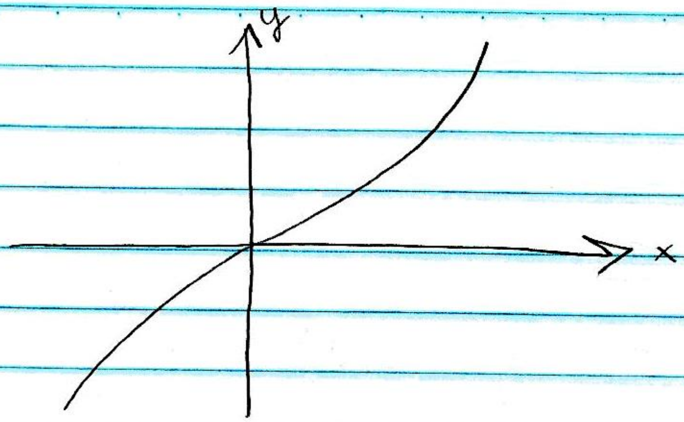
$f'(x) = 0 = 3x^2 + 1$ → não há pt. crítico

- Concavidade

$f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0 \rightarrow x > 0$: p/ cima

$f''(x) < 0 \rightarrow x < 0$: p/ baixo


y
x

35. $f(x) = 64x^2 - 16x$

. interseção com eixos

$x = 0 \;:\; y = 0 \quad \therefore \quad \underline{\underline{(0,0)}}$

$y = 0 \;:\; 0 = 64x^2 - 16x$

$0 = 16x(4x - 1)$

$\therefore \; x = 0 \,, \; x = \frac{1}{4} \;;\; \underline{\underline{\left(\frac{1}{4}, 0\right)}}$

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} 64x^2 - 16x = \lim_{x \to +\infty} 64x^2\left(1 - \frac{1}{4x}\right) = +\infty \\ &\lim_{x \to -\infty} 64x^2 - 16x = \lim_{x \to -\infty} 64x^2\left(1 - \frac{1}{4x}\right) = +\infty \end{aligned} \right.$$

. pontos críticos

$f'(x) = 128x - 16$

$f'(x) = 0 = 128x - 16 \;;\; x = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$

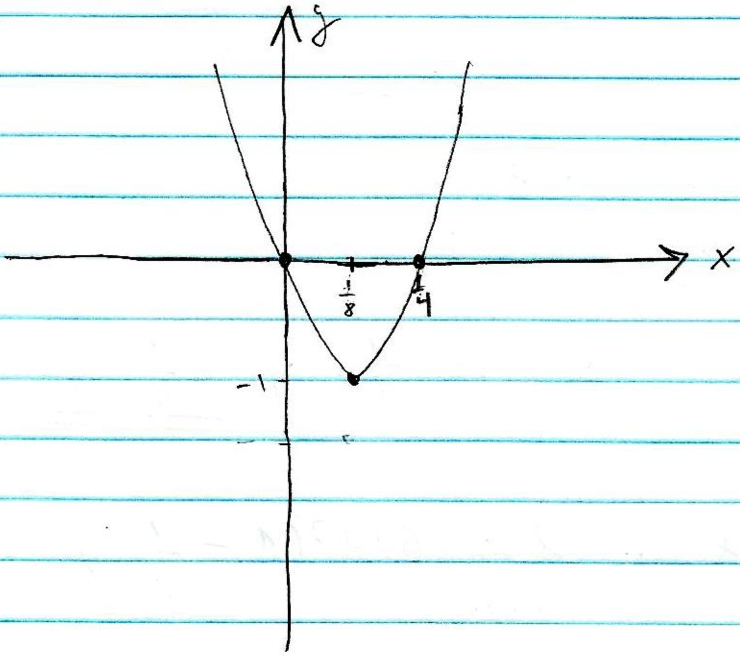
$f''(x) = 128 > 0 \longrightarrow x = \frac{1}{8}$ pt. Mínimo local

$f\left(\frac{1}{8}\right) = 64 \cdot \frac{1}{64} - 16\frac{1}{8} = 1 - 2$

$= -1 \,//$

- Concavidade

$f''(x) = 128 > 0 \rightarrow$ p/ cima $\forall x$



36. $f(x) = \dfrac{6x^5 + 20x^3 - 90x}{32}$

- Intersecção

$x = 0 \quad : \quad y = 0 \quad : \quad \underline{(0,0)}$

$y = 0 \quad : \quad 6x^5 + 20x^3 - 90x = 0$

$x(6x^4 + 20x^2 - 90) = 0$

$// \; x = 0 \; //$

$6x^4 + 20x^2 - 90 = 0$

$3x^4 + 10x^2 - 45 = 0$

$\downarrow$

$3z^2 + 10z - 45 = 0$

12
45
60
48
540

$z = -10 \pm \sqrt{100 + 540} \; / 6$

$= \dfrac{-10 \pm \sqrt{640}}{6} = \dfrac{-10 \pm 25.3}{6} \begin{matrix} \nearrow 2.5 \\ \searrow -\cancel{5.9} \end{matrix}$

$z = 2.5 \Longleftrightarrow x^2 = 2.5 \rightarrow \underline{\underline{x = \pm 1.6}}$

$\underline{(\pm 1.6, 0)}$

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{6x^5 + 20x^3 - 90x}{32} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \; \ldots \ldots = -\infty$

Pontos críticos

$$f'(x) = \frac{30x^4 + 60x^2 - 90}{32}$$

$$f'(x) = 0 = \frac{30x^4 + 60x^2 - 90}{32}$$

$$30x^4 + 60x^2 - 90 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

$$z = -2 \pm \sqrt{4 + 12} \ /2$$

$$= \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$z = -3 \longrightarrow \cancel{x^2 = -3}$$

$$z = 1 \longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}$$

$$f''(x) = \frac{120x^3 + 120x}{32} \ ; \ \begin{cases} f''(1) > 0 \rightarrow \underline{x = 1 \text{ Mín. local}} \\ f(1) = \frac{-64}{32} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(-1) < 0 \rightarrow \underline{x = -1 \text{ Máx.}} \\ f(-1) = 2 \end{cases}$$

concavidade

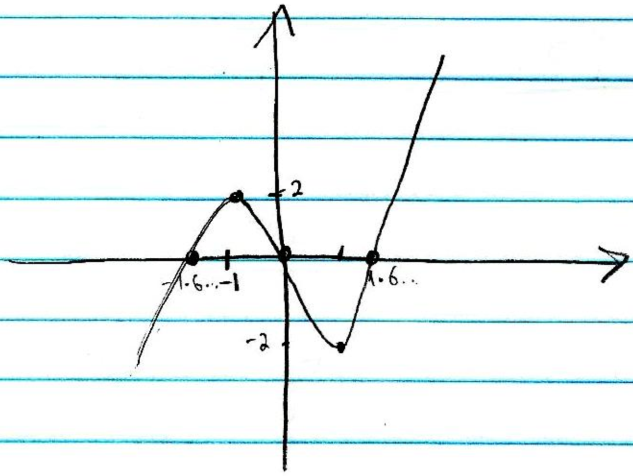
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{120x^3 + 120x}{32} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x > 0$$

$$x\underbrace{(x^2+1)}_{>0} > 0$$

$$\Rightarrow \underline{x > 0 \ : \ \text{p/ cima}}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \underline{x < 0 \ : \ \text{p/ baixo}}$$



37. $f(x) = \sqrt[3]{x}\;(x^2 - 7)$

$= x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}$

interseção

eixo x : $y = 0$: $x^{7/3} - 7x^{1/3} = 0$

$x^{1/3}(x^2 - 7) = 0$

$x = 0$; $x = \pm\sqrt{7}$

eixo y : $x = 0$: $y = 0$

$(0,0)$, $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$

pontos críticos

$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = 0 = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = 0$

$x^{\frac{4}{3}}(1 - x^{-2}) = 0$

$\frac{4}{3} + x = -\frac{2}{3}$

$x = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$= -2$

$(x \neq 0)$ $x^{-2} = 1$

$x^2 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

$f''(x) = \frac{28}{9} x^{\frac{1}{3}} + \frac{14}{9} x^{-5/3}$

$f''(1) = \frac{28}{9} + \frac{14}{9} > 0 \rightarrow x = 1$ é mínimo local

$f''(-1) = \quad < 0 \longrightarrow x = -1$ é máximo local

$\begin{cases} f(1) = -6 & \text{Mínimo local} \\ f(-1) = 6 & \text{Máximo local} \end{cases}$

Concavidade

$f''(x) = \frac{28}{9} x^{1/3} + \frac{14}{9} x^{-5/3}$

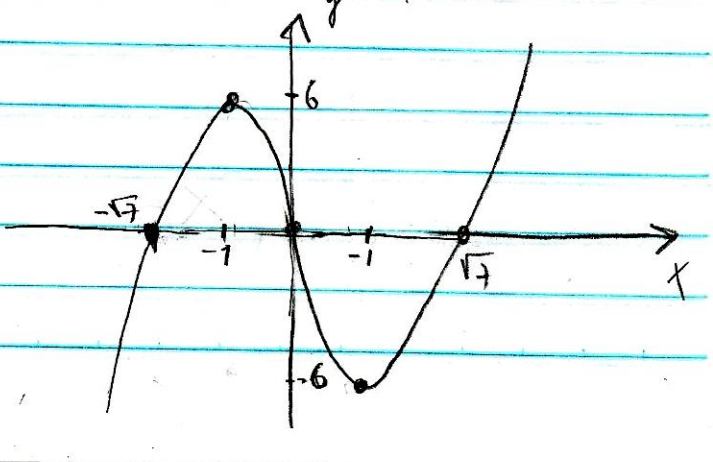
$f''(x) > 0 \;, \quad \frac{28}{\cancel{9}} x^{1/3} + \frac{14}{\cancel{9}} x^{-5/3} > 0$

$14 x^{-5/3} \underbrace{(2x^2 + 1)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow$ $x > 0$: conc. para cima

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ $x < 0$: conc. p/ baixo

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x}\,(x^2 - 7) = \infty \\ \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x}\,(x^2 - 7) = -\infty \end{cases}$$



38. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}(x+40)}{4} = \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{4} + 10\,x^{\frac{2}{3}}$

i) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{4}(x+40)$; $\boxed{\begin{array}{l} f(x) > 0 \rightarrow x > -40 \\ f(x) < 0 \rightarrow x < -40 \end{array}}$

ii) $x=0$: $y=0$; $\underline{(0,0)}$

$y=0$: $\dfrac{x^{2/3}}{4}(x+40) = 0$

$\Rightarrow x=0$; $x=-40$

$\underline{(-40,0)}$;

$\boxed{\begin{array}{c} (0,0) \\ (-40,0) \end{array}}$

iii) pontos críticos

8

$f'(x) = \dfrac{5}{12}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$= x^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{5}{12}x + \dfrac{20}{3}\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{12}_{4}}x + \dfrac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{3}} = 0$

$\dfrac{x}{4} = -4 \Rightarrow x = -16$ pto. crítico

$f(-16) \simeq 38.1$

f'(x) não existe em x=0.

- <u>Concavidade</u>

$$f''(x) = \frac{5}{18} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{20}{9} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \underbrace{x^{-\frac{4}{3}}}_{>0} \left(-\frac{20}{9} + \frac{5}{18} x \right) \quad ; \quad x \neq 0$$

$$f''(x) > 0 \; : \quad -\frac{20}{9} + \frac{5}{18} x > 0$$

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{18}_2} x > \frac{\cancel{20}^4}{\cancel{9}_1} \rightarrow \underline{x > 8} : \underline{\text{conc. p/ cima}}$$

$$f''(x) < 0 \; : \quad x < 8 \longrightarrow x < 8 \; ; \; \underline{\text{conc. p/ baixo}}$$

$f''(x) = ?$ em $x = 0$

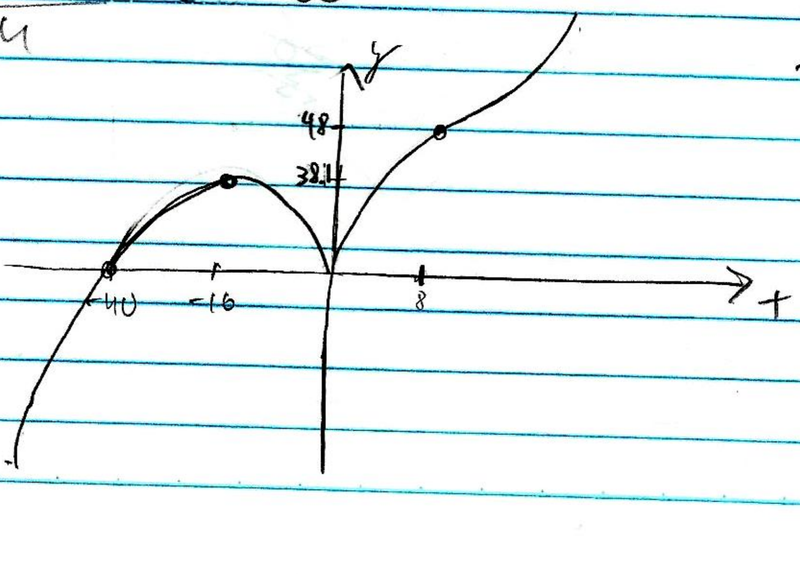
$f''(-16) < 0 \Longrightarrow x = -16$ é pto máximo local.

- $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2/3}(x+40)}{4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{2/3}(x+40)}{4} = -\infty$$

$f(8) = 12$

$f(-16) = 38.1$



39. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+4}$

i) interseção

$x = 0 \rightarrow y = 0$; $\underline{(0,0)}$

$y = 0 \rightarrow x = 0$

ii) pontos críticos

$$f'(x) = \frac{8}{x^2+4} - \frac{8x}{(x^2+4)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{8}{x^2+4} - \frac{16x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{8(x^2+4) - 16x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8x^2+32-16x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 32 - 8x^2 = 0$

$x^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 2}}$

iii) Concavidade

$$f''(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} + \frac{(32-8x^2)(-2)}{(x^2+4)^3}2x$$

$$= \frac{-16x}{(x^2+4)^2} - 4x\frac{(32-8x^2)}{(x^2+4)^3}$$

$$= \frac{-16x(x^2+4) - 4x(32-8x^2)}{(x^2+4)^3}$$

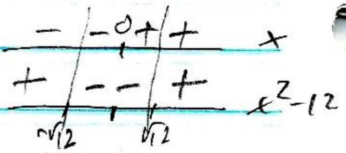
$$= \underbrace{-16x^3}_{} - 64x - 128x + \underbrace{32x^3}_{} \Big/ (x^2+4)^3$$

$$= \frac{16x^3 - 192x}{\underbrace{(x^2+4)^3}_{>0}}$$

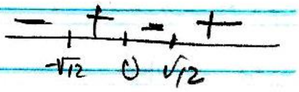
$$f''(x) > 0 \longrightarrow 16x^3 - 192x > 0$$

$$x^3 - 12x > 0$$

$$x(x^2-12)) > 0$$



$$\begin{cases} f''(x) > 0 : -\sqrt{12} < x < 0 \text{ e } x > \sqrt{12} \\ f''(x) < 0 : x < -\sqrt{12} \text{ , } 0 < x < \sqrt{12} \end{cases}$$



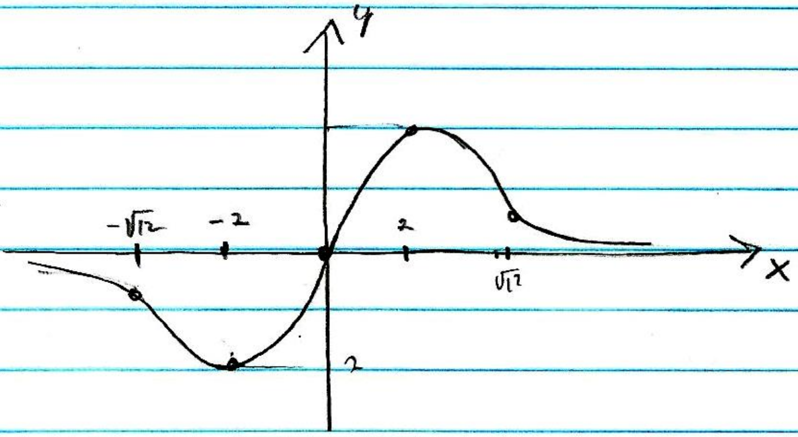
iv) $\lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0^+$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0^-$

Aqui :

$f'(-2) = 0$, $f''(-2) > 0$ $\rightarrow$ -2 é pto. de mínimo local
$f(-2) = -2$.

$f'(2) = 0$, $f''(2) < 0$ $\rightarrow$ 2 é pto. de máximo local
$f(2) = 2$



0, $\pm\sqrt{12}$: pontos de inflexão

40. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

i) interseção :

$x=0$: $y=0$; $\underline{\underline{(0,0)}}$

ii) Assíntotas

$x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

iii) <u>pontos críticos</u>

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{(x^2-1)^2}\, 2x$$

$$= \frac{1}{x^2-1} - \frac{2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2-1=0 \Rightarrow x^2 = -1 \;\nexists$

$f'(x)$ não existe $\Rightarrow \underline{\underline{x = \pm 1}}$

iv) <u>Concavidade</u>

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} - \frac{(x^2+1)(-2)}{(x^2-1)^3}\, 2x$$

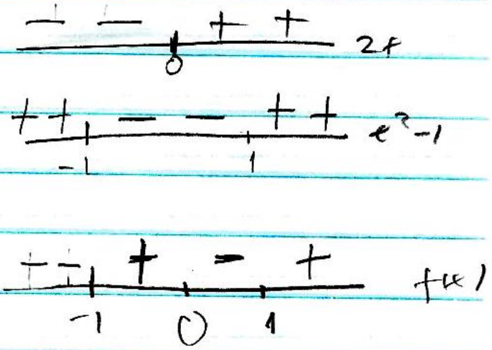
$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2} + \frac{4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-2x(x^2-1)+4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3} = \frac{-\boxed{2x^3}+2x+\boxed{4x^3}+4x}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\overbrace{(x^2+3)}^{>0}}{(x^2-1)^3}$$

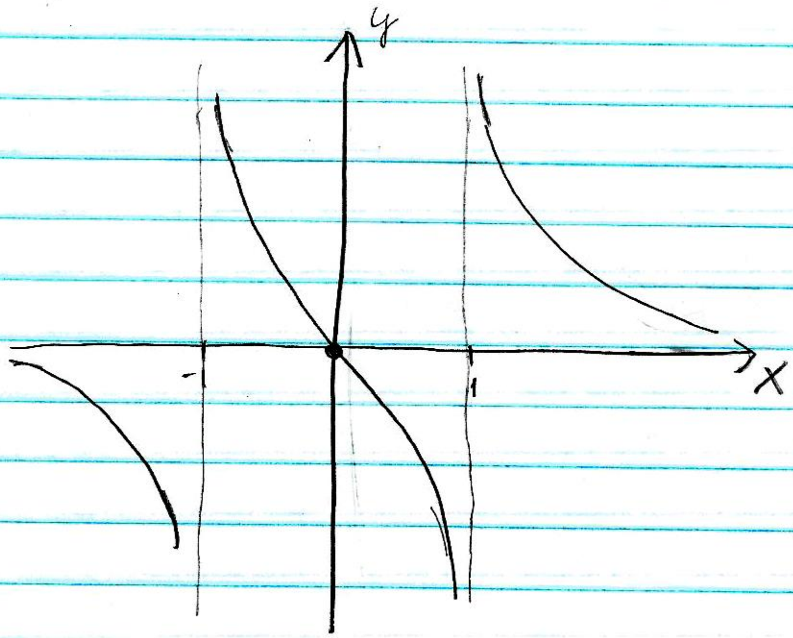
$$f''(x) > 0 \implies \frac{2x}{(x^2-1)^3} > 0$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{x^2-1} > 0$$



$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{l} f''(x) > 0 \ ; \ -1<x<0 \ , \ x>1 \\ f''(x) < 0 \ ; \ -x<-1 \ , \ 0<x<1 \end{array}}$$



41. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

i) Intersecção

$x=1 \rightarrow y=0 \quad ; \quad (1,0)$

ii) Assíntotas

$$x=0 \quad ; \quad \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{\infty} = -\infty \\ \lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{x^2} = 0^+ \ ; \ \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0^- \end{cases}$$

iii) Pontos críticos

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2(x-1)}{x^3}\,2x$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{4x(x-1)}{x^{\cancel{3}2}}$$

$$= \frac{1-4(x-1)}{x^2} = \frac{1-4x+4}{x^2} = \frac{5-4x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 5-4x=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{5}{4}}}$

$f'(x)$ não existe $\Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$

xv) Concavidade

$$f''(x) = \left(\frac{5-4x}{x^2}\right)' = \frac{-4}{x^2} - 2\,\frac{5-4x}{x^{\cancel{3}2}}\,2x$$

$$= \frac{-4}{x^2} - 4\cdot\frac{5-4x}{x^2}$$

$$= \frac{-4-20+16x}{x^2}$$

$$\left\|\, f''(x) = \frac{-24+16x}{x^2} \,\right\|$$

$f''(x) > 0$: $-24+16x > 0$

$16x > 24$

$x > \frac{24}{16}$, $\boxed{x > \frac{3}{2}}$: conc. p/cima

$f''(x) < 0$: $\boxed{x < \frac{3}{2}}$: conc. p/ baixo

$x = \frac{5}{4} \rightarrow f'(\frac{5}{4}) = 0$, $x = \frac{5}{4} = 1.25 < 1.5 \Longrightarrow$

$(\frac{5}{4}) = \frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{25}{16}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{25}{16}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{25} = \frac{4}{25} = 0.16 \Longrightarrow$ $f''(\frac{5}{4}) < 0 \rightarrow$ x = 5/4 es pto. máximo local

$f(\frac{5}{4}) = 0.16$