Lista 2 [Parte2]

Função injetiva, sobrejetiva; função par, ímpar

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

2. Verifique se $g \circ f$ está definida nos seguintes casos
   (i) $f(x) = -1 - \sqrt{x}$, e $g(x) = \sqrt{x}$
   (ii) $f(x) = 1$, e $g(x) = 1/(x-1)^2$

3. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ onde f e g são funções definidas em $\mathbb{R}$ e dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases}, \qquad g(x) = 2x + 3$$

$$\textit{Resp.}: f \circ g = \begin{cases} 4x^2 + 4x & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x + 3 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}, \qquad g \circ f = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9 & \text{se } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

4. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$ onde f e g são funções definidas em $\mathbb{R}$ e dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\textit{Resp.}: (f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - 4x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x^4 + x^2 & \text{se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \end{cases}, (g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } x > \frac{5}{4} \\ -16x^2 + 24x - 8 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

5. Seja $f(x) = 1/x$. Mostre que $f(f(x)) = x$ para $x \neq 0$.

6. Seja $f(x) = 1/(1-x)$. Mostre que $f(f(f(x))) = x$ para $x \neq 0$, $x \neq 1$.

7. Seja $a \in R$ e $f(x) = a - x$. Mostre que $f(f(x)) = x$ para todo x real.

8. Sejam $f(x) = 1 + 2x$, e $g(x) = a + bx$. Para que constantes a e b tem-se $f \circ g = g \circ f$?

9. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

   Verifique se f é injetiva, sobrejetiva.

10. (i) Mostre a composta de duas funções injetivas é uma função injetiva.
(ii) Mostre que a composta duas funções sobrejetivas é uma função sobrejetiva.
(iii) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções tal que $g \circ f$ é injetiva então f é injetiva.
(iv) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções tal que $g \circ f$ é sobrejetiva então g é sobrejetiva.
(v) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ satisfazem $g \circ f = I_X$ então f é injetiva e g é sobrejetiva.
(vi) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ satisfazem $g \circ f = I_X$ e $f \circ g = I_Y$ então f é bijetiva e tem-se $g = f^{-1}$.
(vii) Mostre que se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções bijetivas então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

11. Determine se existe uma função injetiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$.

12. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que satisfaz
$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$
Mostre que f é função par.

13. Mostre que se f e g são funções pares então $f + g$ é uma função par.

14. Mostre que se f e g são funções pares então fg é uma função par.

15. Mostre que se f e g são funções ímpares então $f + g$ é uma função ímpar.

16. Mostre que se f e g são funções ímpares então fg é uma função par.

17. Seja $f(x)$ uma função arbitrária. Sejam $F(x) = |f(x)|$ e $G(x) = f(|x|)$. Discuta a paridade de F e G.