Cálculo A

Continuidade

Analise se cada uma das funções abaixo é contínua para todos os pontos de seu domínio. Caso não seja, determine os pontos em que f é descontínua.

1. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se } x \leq 3 \\ 3x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

2. $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

9.(a) $f(x) \equiv \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = x \operatorname{sgn} x$

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} (\sin x)$

10. Para cada uma das funções abaixo defina $f(0)$ de modo a termos cada função contínua em $x = 0$.

(a) $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad (n \in N)$

(b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

11. Determine o valor de **a** de modo a termos $f(x)$ contínua,

$$f(x) = \begin{cases} 4\,.\,3^x & \text{se } \ x < 0 \\ 2a + x & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

Respostas

1. f não é contínua em $x = 3$

2. f é contínua

3. f é contínua

4. f não é contínua em $x = 0$

5. f é contínua

6. f é contínua

7. f não é contínua em $x = 0$

8. f não é contínua em $x = 0$

9. (a) f não é contínua em $x = 0$

(b) f é contínua

(c) f não é contínua em $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

10. (a) $f(0) = n$

(b) $f(0) = \frac{1}{2}$

11. $a = 2$

Continuidade

Determine os pontos de descontinuidade das funções abaixo:

1. $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq 3 \\ 3x, & x > 3 \end{cases}$

Temos

$(-\infty, 3)$: $f(x) = -2x^2$ contínua

$(3, +\infty)$: $f(x) = 3x$ contínua

$x = 3$: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3x = 9 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -2x^2 = -2 \cdot 9 = -18 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ não existe

logo f é descontínua em $x = 3$.

tilibra

/ /

2. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3} = \begin{cases} 1, & x > 3/2 \\ -1, & x < 3/2 \end{cases}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3/2\}$

Temos,

$(\frac{3}{2}, \infty)$: $f(x) = 1$: contínua

$(-\infty, \frac{3}{2})$: $f(x) = -1$: contínua

f é contínua

3.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Temos:

$x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ contínua

$x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (já visto)

Também,

$f(0) = 1$

Logo

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

tilibra

Daí, segue-se que $\underline{f(x) \text{ é contínua } \forall x}$.

4. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$\underline{\underline{x \neq 0}}$: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$: contínua

$\underline{\underline{x = 0}}$: $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$:

Sejam as seguintes sequências com termo geral:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{\pi(2n + \frac{1}{2})}, & \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \\ x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}, & \lim_{n \to \infty} x'_n = 0 \end{cases}$$

Então, podemos usá-los para calcular $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x} = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\pi(2n + \frac{1}{2})}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sin \pi(2n + \tfrac{1}{2}) = 1$$

/ /

$$\lim_{x'\to 0^+} \operatorname{sin}\frac{1}{x'} = \lim_{n\to +\infty} \operatorname{sin}\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \operatorname{sin} 2\pi n = 0$$

Daí, vemos que não existe $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sin}\frac{1}{x}$,

logo,

$f(x)$ não é contínua em $x=0$

5.

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sin}\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Ponto $x=0$ é o único que pode apresentar problemas:

Temos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sin}\frac{1}{x}$$

Aqui, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sin}\frac{1}{x}$ não existe mas certamente temos que

$$-2 < \left|\lim_{x\to 0} \operatorname{sin}\frac{1}{x}\right| < 2$$

tilibra

Daí,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

Certamente satisfaz:

$$-2\left(\lim_{x\to 0} x\right) < \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} < \left(\lim_{x\to 0} x\right) 2$$

$$-2 \cdot 0 < \lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \left\| \lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0 \right\|$$

Ora,

$$f(0) = 0$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = f(0)$$

$\Rightarrow$ f é contínua em $x = 0$

e, $\boxed{f \text{ é contínua } \forall x}$.

6.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ é o único ponto que precisa ser analisado:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(0^-)^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{(0^+)^2}} = e^{-\infty} = 0$$

$\therefore$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$f(x)$ é contínua

7. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ é o único ponto que precisa ser analisado:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ temos que

$\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Logo, tem-se que

$f(x)$ não é contínua em $x = 0$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

O único ponto que pode apresentar descontinuidade é $x = 0$.

/ /

Temos,

$$|\operatorname{sen} x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \operatorname{sen} x > 0 \\ -\operatorname{sen} x, & \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= -1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Daí,

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

e temos então que $f(x)$ não é contínua em $x=0$.

9

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\therefore$ $f(x) = \operatorname{sgn} x$ é descontínua em $x = 0$ pois temos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

b) $f(x) = x \operatorname{sgn} x = \left\{\begin{array}{ll} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{array}\right\} = |x|$

$f(x) = |x|$ é contínua $\forall x$.

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) = \begin{cases} 1, & \sin x > 0 \Leftrightarrow 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0, & \sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, \; n \in \mathbb{Z} \\ -1, & \sin x < 0 \Leftrightarrow (2n+1)\pi < x < 2n\pi \end{cases}$

$f(x)$ é descontínua em $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

tilibra

10. Para cada uma das funções abaixo defina $f(0)$ de modo a termos cada função contínua em $x = 0$.

a)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} & (n \in \mathbb{N}) \\ f(0) & \end{cases}$$

Temos que por

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Ora,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (1+x)^n &= \binom{n}{n}1^n + \binom{n}{n-1}1^{n-1}x + \dots + \binom{n}{k}1^k x^{n-k} + \dots \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{0}x^n \\ &= 1 + \frac{n!}{(n-1)!}x + \dots + \frac{n!}{(n-k)!k!}x^{n-k} + \dots + nx^{n-1} + x^n \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + nx + \dots + \frac{n!}{(n-k)!k!}x^{n-k} + \dots + x^n \cancel{-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} n + \frac{n!}{(n-2)!2!}x + \dots + nx^{n-2} + x^{n-1}$$

$$= n$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0) = n}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \\ \\ f(0) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\left(\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}\right) \qquad = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\therefore \boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$$

11. Ache o valor de a para que tenhamos f contínua

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & x < 0 \\ 2a + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$x < 0$: $f(x) = 4 \cdot 3^x$ é contínua

$x = 0$: $f(x) = 2a + x$

$f(0) = 2a$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 4 \cdot 3^0 = 4$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2a$$

Aqui $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ se $\underline{a = 2}$.

Além disso, $\| f(0) = 4 = \lim_{x \to 0^\pm} f(x) \|$

Logo $\underline{a = 2 \text{ torna } f(x) \text{ contínua}}$.