Cálculo A

Limites - Questões conceituais

Nos exercícios 1 a 6 defina funções $f(x)$, $g(x)$ de modo a satisfazer as três condições dadas.

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$ $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 20$
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$ $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$ $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 3$
5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$ $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \infty$
6. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
7. Seja
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ -x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$
Calcule, se existir, os seguintes limites
(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(b) $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$
(d) Para que números **a** existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
8. Seja
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x^3 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$
Calcule, se existir, os seguintes limites
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$
(d) Para que números **a** existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
9. Seja
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ 0 & \text{se } x \text{ não é inteiro} \end{cases}$$
Calcule, se existir, os seguintes limites
(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$
(b) $\lim_{x\to 3.5} f(x)$
(c) Para que números **a** existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
10. Seja $f(x) = |x| - x$, para que valores de **a** existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
11. Encontre uma função f e um inteiro positivo n tal que $\lim_{x\to 0} f(x^n)$ existe, mas $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.
12. Seja $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq a$ e assuma que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Mostre, por meio de um exemplo, que não se tem necessariamente $L < M$.
13. Seja $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = M$. Mostre que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe e é igual a $L - M$.
14. Seja $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = M$. Mostre que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe e é igual a $\frac{M}{L}$.
15. Encontre duas funções f e g tal que $\lim_{x\to 1}(f + g)(x)$ existe, mas nenhum dos limites $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$ existem.
16. Encontre duas funções f e g tal que $\lim_{x\to 1}(fg)(x)$ existe, mas nenhum dos limites $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$ existem.
17. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a}$$
existe, e $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Determine $\lim_{x\to a} g(x)$.
18. Se $f(x)$ é uma função par e $\lim_{x\to a} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a} f(x)$.
19. Se $f(x)$ é uma função par e $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a^-} f(x)$.
20. Se $f(x)$ é uma função par e $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a^+} f(x)$.
21. Se $f(x)$ é uma função ímpar e $\lim_{x\to a} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a} f(x)$.
22. Se $f(x)$ é uma função ímpar e $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a^-} f(x)$.
23. Se $f(x)$ é uma função ímpar e $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ determine, se for possível, $\lim_{x\to -a^+} f(x)$.

24. Sejam f e g funções tais que: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$. Determine se cada um dos limites a seguir pode ser determinado com base nesta informação. Se ele puder, dê o valor do limite, do contrário, mostre, por uma escolha específica de f e g, que ele não pode.
(a) $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x))$
(b) $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$
(c) $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x)$

25. Sejam f e g funções tais que: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Determine se cada um dos limites a seguir pode ser determinado com base nesta informação. Se ele puder, dê o valor do limite, do contrário, mostre, por uma escolha específica de f e g, que ele não pode.
(a) $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x))$
(b) $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$
(c) $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x)$

26. Sejam f e g funções tais que: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Determine se cada um dos limites a seguir pode ser determinado com base nesta informação. Se ele puder, dê o valor do limite, do contrário, mostre, por uma escolha específica de f e g, que ele não pode.
(a) $\lim_{x\to\infty}(f(x)/g(x))$
(b) $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$
(c) $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 1)g(x)$

27. Dê exemplos de funções f e g tal que
(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, mas $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)$ existe e não é igual a zero.
(b) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe e não é igual a 1.
(c) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Cálculo A - Lista 9 - Solução

1.
$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \;,\; \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5 \end{cases}$$

Seja
$$\begin{cases} f(x) = 5x \\ g(x) = x \end{cases}$$

Então $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 5x = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$

e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{5x}{x}$

$= \lim_{x\to 0} 5$

$= 5$

Resposta : $\boxed{\begin{matrix} f(x) = 5x \\ g(x) = x \end{matrix}}$

2.
$$\begin{cases} \lim_{x\to \infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty \\ \lim_{x\to \infty} f(x)\, g(x) = 20 \end{cases}$$

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = 20x$

$\therefore$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to \infty} g(x) = \lim_{x\to \infty} (20x) = \infty$

$\therefore$

$\lim_{x\to \infty} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{\cancel{x}}\, 20\cancel{x}\right)$

$= \lim_{x\to \infty} 20 =$

$= \underline{\underline{20}}$

$\therefore$

$\boxed{\begin{matrix} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = 20x \end{matrix}}$

3.

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = x^2$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = \infty$

$\therefore$

$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} x^2$

$= \lim_{x\to\infty} x$

$= +\infty$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= x^2 \end{aligned}}$$

4.

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 3 \end{cases}$$

$f(x) = x$

$g(x) = x - 3$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (x-3) = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} (x - x + 3)$

$= \lim_{x\to\infty} 3$

$= 3$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= x - 3 \end{aligned}}$$

5.
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x)-g(x)\right) = \infty \end{cases}$$

$f(x) = x^2$

$g(x) = x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} (x^2-x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2(1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})$$

$$= \infty$$

$\therefore$

$$\boxed{f(x) = x^2 \ , \ g(x) = x}$$

6.
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty \end{cases}$$

$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = x$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x$$

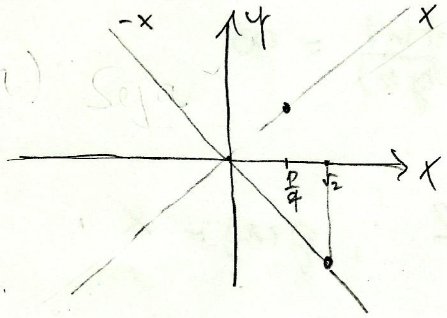
$$= +\infty$$

$\therefore$

$$\boxed{f(x) = x^2 \ , \ g(x) = x}$$

7.

$$f(x) = \begin{cases} x \,, & x \in \mathbb{Q} \\ -x \,, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$



a) Seja a sequência

$\{x_n\} = \{0.9 \,, 0.99 \,, 0.999 \,, \dots\}$ (*)

temos que

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \;\leq$

e

$\{f(x_n)\} = \{0.9 \,, 0.99, \dots\}$

Logo fazendo $x \to 1$ via a sequência dada em (*) temos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 .$$ (**)

$(x_n = 0.9, 0.99, \dots)$

Seja agora a sequência

$$\{x_n\} = \underbrace{\left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}}_{\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}$$

Aqui temos:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$ (***)

$x_n = 1+\sqrt{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$

Os limites dados em (**) e (***) são distintos, logo

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) \;\nexists}$$

b) $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

Seja

$\{x_n\} = \{1.4 \,, 1.41 \,, 1.414, \dots\}$ (*)

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$

Então

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \sqrt{2}$$ (**)

$(x_n = 1.4, 1.41, \dots)$

7. Cont.

Seja

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{n}} \right\}$$

Então

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$$

e

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = -\sqrt{2} \qquad (***)$$

$x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}, \dots$

Os limites em (**) e (***) são distintos, logo

$$\boxed{\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) \nexists}$$

---

c. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Aqui, se formamos

(x_n), $x_n \in \mathbb{Q}$ e $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

tem-se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Também, se formamos

(x_n), $x_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

temos

$$\lim_{x_n\to 0} f(x) = 0$$

Qualquer que seja a sequência (x_n), $x_n \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nos dá

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$

d. O único ponto em que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ é $\underline{a=0}$.

8.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to 2} f(x) \nexists$

Próximo de 2 há infinitos números racionais e irracionais.

Aproximando-se de 2 via uma sequência de racionais tem-se

$$\underbrace{\lim_{x \to 2}}_{\text{racional}} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 2}}_{\text{racional}} x^2 = 4 \quad (*)$$

Aproximando-se de 2 via uma sequência de irracionais tem-se

$$\underbrace{\lim_{x \to 2}}_{\text{irracional}} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 2}}_{\text{irracional}} x^3 = 8 \quad (**)$$

Os limites dados em $(*)$ e $(**)$ são distintos.

Daí tem-se

que $\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) \nexists}$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Aqui, aproximando-se de 1 por uma sequência de racionais tem-se

$$\underbrace{\lim_{x \to 1}}_{\text{racional}} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1}}_{\text{racional}} x^2 = 1$$

Aproximando-se de 1 por uma sequência de irracionais tem-se

$$\underbrace{\lim_{x \to 1}}_{\text{irracional}} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1}}_{\text{irracional}} x^3 = 1$$

$\therefore$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 1}$$

8. Cont.

c) $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

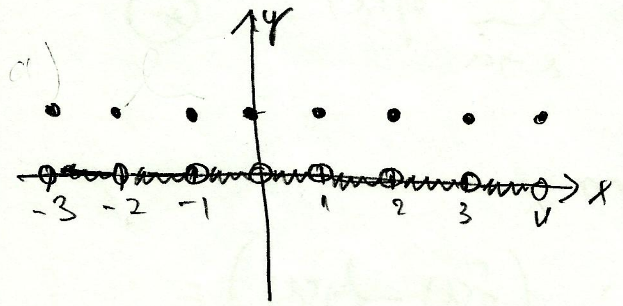
Mesma razão do item b

d) Os únicos pontos onde $\not\exists$ tem $\lim_{x\to a} f(x)$

são $\boxed{x = 0 \text{ e } x = 1}$

---

9. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ inteiro} \\ 0, & x \text{ não é inteiro} \end{cases}$

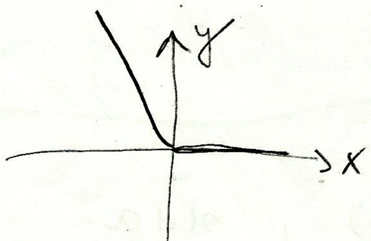


a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to 3.5} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$.

10. $f(x) = |x| - x = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$



O limite existe para todo $a \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| - x$

$= |a| - a$

---

11. $\begin{cases} \lim_{x\to 0} f(x^n) \ \exists \\ \lim_{x\to 0} f(x) \ \not\exists \end{cases}$

Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Aqui,

$\lim_{x\to 0} f(x) \ \not\exists$

Mas $f(x^2) = \begin{cases} 1, & x^2 \geq 0 \end{cases}$

$\therefore$ $f(x^2) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1$$

---

12. $f(x) < g(x)$, $x \neq a$

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = L \\ \lim_{x\to a} g(x) = M \end{cases}$$

Seja $\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = 2|x| \end{cases}$

Aqui $f(x) < g(x)$, $x \neq 0$

Mas

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = M$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = N$$

$\therefore$ $N = M$.

13.

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = L & (*) \\ \lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = M \end{cases}$$

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$

Então $\lim_{x\to a} h(x) = M$. (**)

De (*) e (**) temos

$$\lim_{x\to a} (f(x) - h(x)) =$$

$$= \lim_{x\to a} (\cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} + g(x))$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \quad (*)$$

Mas

$$\lim_{x\to a} (f(x) - h(x)) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{L} - \underbrace{\lim_{x\to a} h(x)}_{M}$$

$$= L - M \quad (**)$$

De (*) e (**)

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = L - M}$$

14.

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = M \end{cases}$$

Seja $h(x) = f(x)g(x)$

$\therefore \lim_{x\to a} h(x) = M$

Então

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{h(x)}{f(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{f(x)}g(x)}{\cancel{f(x)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \quad (*)$$

Mas

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{h(x)}{f(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} h(x)}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{M}{L} \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue-se

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = \frac{M}{L}}$$

15.

$\lim_{x\to 1} (f+g) \ \exists$

$\lim_{x\to 1} f(x) \ \nexists$

$\lim_{x\to 1} g(x) \ \nexists$

Seja

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ g(x) = 3 - \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$

$\lim_{x\to 1} g(x) \ \nexists$

Mas

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to 1} 3 = 3$$

16.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} (fg)(x) \ \exists \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) \ \nexists \\ \lim\limits_{x\to 1} g(x) \ \nexists \end{cases}$$

Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$

$$f(x)g(x) = -1, \ \forall x$$

$$\lim_{x\to 1} [f(x)\, g(x)] = -1$$

17.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - g(x)}{x-a} = K \\ \lim\limits_{x\to a} (x-a) = 0 \end{cases}$$

Daí,

$$\lim_{x\to a} \left[f(x) - \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)} (x-a) \right] =$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \quad (*)$$

Mas

$$\lim_{x\to a} \left[f(x) - \frac{f(x) - g(x)}{x-a} (x-a) \right] =$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \underbrace{(x-a)}_{0}$$

$$= L \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue-se que

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = L}$$

18.

$$\begin{cases} f(x) : \text{par} \\ \lim_{x \to a} f(x) = L \end{cases}$$

$\lim_{x \to -a} f(x)$:

Seja $y = -x$: $x \to -a \Leftrightarrow y \to a$

$\therefore$

$$\lim_{x \to -a} f(x) = \lim_{y \to a} f(-y)$$

$$= \lim_{y \to a} f(y)$$

$$= L$$

$\therefore$

$$\boxed{\lim_{x \to -a} f(x) = L}$$

19.

$$\begin{cases} f(x) \text{ par} \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

$\lim_{x \to -a^-} f(x)$:

Seja $y = -x$

$\therefore$ $x \to -a^-$

$\therefore$ $x = -a - \varepsilon$

$-y = -a - \varepsilon$

$y = a + \varepsilon$

$y \to a^+$

$\therefore$

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \lim_{y \to a^+} f(-y)$$

$$= \lim_{y \to a^+} f(y)$$

$$= L$$

$\therefore$

$$\boxed{\lim_{x \to -a^-} f(x) = L}$$

20.

$$\begin{cases} f(x) \text{ par} \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

Seja $y = -x$

$\therefore$ $x \to -a^+$

$\underset{\sim}{x} = -a + \varepsilon$

$-y = -a + \varepsilon$

$y = a - \varepsilon$

$y \to a^-$

$\therefore$

$$\lim_{x \to -a^+} f(x) = \lim_{y \to a^-} f(-y)$$

$$= \lim_{y \to a^-} f(y) \; ?$$

Não se pode determinar

21.

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \lim_{x \to a} f(x) = L \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -a} f(x)$$

Seja $y = -x$

$\therefore$ $x \to -a$

$\Leftrightarrow$

$y \to a$

$\therefore$

$$\lim_{x \to -a} f(x) = \lim_{y \to a} f(-y)$$

$$= \lim_{y \to a} -f(y)$$

$$= -\lim_{y \to a} f(y)$$

$$= -L$$

$\therefore$

$$\boxed{\lim_{x \to -a} f(x) = -L}$$

22.

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

$\lim_{x\to -a^-} f(x)$?

Seja $x = -y$

$x \to -a^-$

$\therefore x = -a - \varepsilon$

$\sim$

$-y = -a - \varepsilon$

$y = a + \varepsilon$

$\therefore y \to a^+$

$\therefore$

$$\lim_{x\to -a^-} f(x) = \lim_{y\to a^+} f(-y)$$

$$= -\lim_{y\to a^+} f(y)$$

$$= -L$$

$\therefore$

$$\boxed{\lim_{x\to -a^-} f(x) = -L}$$

23.

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

$\lim_{x\to -a^+} f(x)$?

Seja $y = -x$

$\therefore x \to -a^+$

$x = -a + \varepsilon$

$\sim$

$-y = -a + \varepsilon$

$y = a - \varepsilon$

$y \to a^-$

$\therefore$

$$\lim_{x\to -a^+} f(x) = \lim_{y\to a^-} f(-y)$$

$$= -\lim_{y\to a^-} f(y)$$

nada se pode afirmar

24...

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to\infty} \left(f(x)+g(x)\right) =$

$= \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$

$= 0+1$

$= 1$ //

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) =$

$= \dfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \dfrac{0}{1} = 0$ //

c) $\lim_{x\to\infty} f(x)\, g(x) =$

$= \lim_{x\to\infty} f(x) \lim_{x\to\infty} g(x)$

$= 0 \cdot 1$

$= 0$ //

d) $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x) = ?$

A menos que saibamos como $f(x)$ tende a zero não podemos afirmar nada. Por exemplo, veja

i) $f(x) = \frac{1}{x} \to \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$g(x) = e^{\frac{1}{x}} \to \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$\therefore$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim x e^{1/x}$

$= \infty$ //

ii) $f(x) = -\frac{1}{x} \to \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} =$

$= 0$

$g(x) = e^{\frac{1}{x}} \to \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$\therefore$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty} x e^{\frac{1}{x}}$

$= -\infty$ //