Cálculo A

Derivação implícita e taxas relacionadas

Usando derivação implícita encontre $\frac{dy}{dx}$ e depois calcule a derivada no referido ponto [Questões (1)-(10)].

1. $x^2 + 4y^2 = 9; \quad (1, \sqrt{2})$
2. $4x^2 - y^2 = 3; \quad (1, 1)$
3. $x^3 + y^2 = 1; \quad (0, 1)$
4. $x^3 + y^3 = 4xy; \quad (2, 2)$
5. $x^4 + y^4 = 18xy; \quad (3, 3)$
6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} = 1; \quad (2, -\sqrt{2})$
7. $\sin y = x; \quad (1/2, \pi/6)$
8. $\sin xy = 1; \quad (1/2, \pi)$
9. $\sin x = \cos y; \quad (-\pi/6, 2\pi/3)$
10. $x^2 + 4xy - y^2 = \frac{8xy}{x^2+y^2}; \quad (-1, -1)$

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = y(x)$ no ponto especificado sabendo que cada equação determina y implicitamente como função diferenciável de x [Questões (11)- (14)].

11. $xy^2 = 18; \quad (2, -3)$
12. $\sin(x + y) = 2x; \quad (0, \pi)$
13. $x^2 + y^2 = 3y; \quad (-\sqrt{2}, 2)$
14. $y^2 = \frac{x^3}{2-x}; \quad (1, 1)$

Cada uma das equações a seguir [Questões (15-17)] determina y como uma função implícita de x. A mesma equação permite também obter y como função explícita de x. Para cada equação pede-se:

(i) Encontrar $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

(ii) Resolver a equação de modo a obter y explicitamente como função de x.

(iii) Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ a partir da expressão obtida em (ii) e confirmar que a expressão obtida é a mesma do item (i).

15. $y^3 = x^2$
16. $\frac{8}{y} = x^2 + 4$
17. $y^3 = \frac{x^2}{x^2-1}$

Partindo de $f \circ f^{-1}(x) = x$ e usando derivação implícita obtenha as derivadas das funções trigonométricas inversas [Questões (18-23)]

18. $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

21. $\frac{d}{dx}\mathrm{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

22. $\frac{d}{dx}\mathrm{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

23. $\frac{d}{dx}\mathrm{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Taxas relacionadas

24. Um tanque tem a forma de um cone circular de altura 5 m e diâmetro 6 m no topo. Enche-se o tanque com água a uma taxa de 1.6 m^3/min. Encontre a taxa com que o nível de água no tanque sobe quando a água atinge 2 metros de profundidade.

25. Seja um quadrado cujos lados aumentam a uma razão de 0.8 m/min. Encontre quão rápido a área do quadrado varia quando seu lado é igual a 3 m.

26. O volume de um cubo aumenta a razão de 144 cm^3/s. Quão rápido aumenta o lado do cubo quando o lado tem comprimento 4 cm?

27. Uma pedra é lançada em um lago produzindo uma onda circular que se propaga com velocidade 25 cm/s. Encontre a razão com que a área do círculo varia após 4 s.

28. Uma bola de neve está derretendo de tal modo que a área de sua superfície diminui a razão de 0.5 cm^2/min. Encontre a razão com que o raio da bola de neve diminui quando o raio é 4 cm.

29. O lado de um triângulo equilátero diminui a uma taxa de 2 cm/s. Determine a taxa com que a área do triângulo diminui quando esta é 100 cm^2.

30. A área de um triângulo aumenta a razão de 4 cm^2/min e sua base aumenta a razão de 1 cm/min. Encontre a razão com que a altura do triângulo varia quando a altura é 20 cm e a área é 80 cm^2.

31. Uma pessoa cuja altura é 2m está diante de um poste de luz cuja altura é 5 m. Se a pessoa se afasta do poste caminhando com velocidade de 1.5 m/s encontre a razão com que o comprimento de sua sombra varia quando ele está a 10 m do poste.

32. Uma escada de 4m de comprimento se apóia em uma parede vertical. Se a base da escada desliza se afastando da parede com velocidade de 30 cm/s, encontre a velocidade com que a parte de cima da escada se movimenta quando a base da escada se encontra a uma distância de 2 m da parede.

33. Um carro A move-se para oeste com velocidade 60 km/h, e um carro B move-se para o sul com velocidade 70 km/h conforme mostra a figura 1. Encontre a taxa de variação da distância entre os carros quando o carro A está a 0.4 km da interseção e o carro B está a 0.3 km da interseção.

34. Uma esteira deposita areia a uma razão de 1.2 m^3/min. A areia depositada forma um cone cujo diâmetro da base é igual a altura [Figura 2]. Encontre a taxa de variação da altura do cone quando a altura é 3 m.

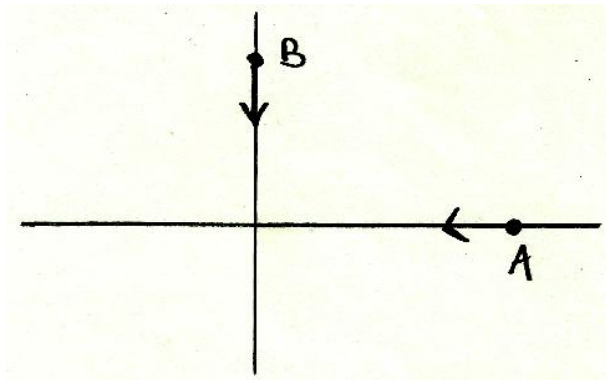

Figura 1:

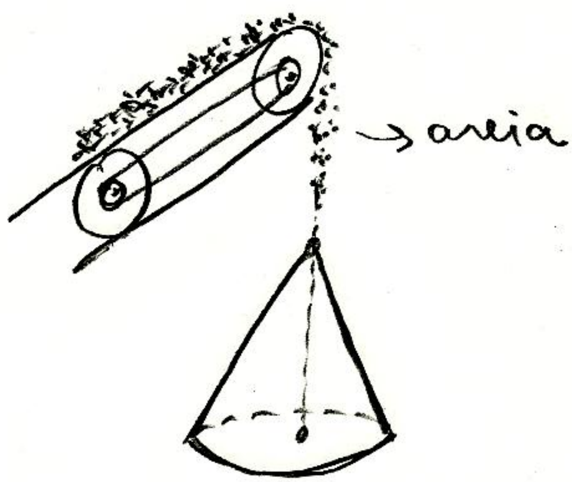

Figura 2:

Respostas:

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$; $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y}$; 4
3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{2y}$; 0
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x^2}{3y^2-4x}$; -1
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{18y-4x^3}{4y^3-18x}$; -1
6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{2x^2}$; $\sqrt{2}/4$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$; $2/\sqrt{3}$
8. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; -2π
9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y}$; -1

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y(x^2-y^2)+(x+2y)(x^2+y^2)^2}{4x(x^2-y^2)+(y-2x)(x^2+y^2)^2}$; -3

11. $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$

12. $y = -3x + \pi$

13. $y = 2\sqrt{2}x - 2$

14. $y = 2x - 1$

15. (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$
    (ii) $y = \sqrt[3]{x^2}$

16. (i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2x}{4}$
    (ii) $y = \frac{8}{x^2+4}$

17. (i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2(x^2-1)^2}$
    (ii) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-1}}$

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24. $\frac{10}{9\pi}$ m/min

25. 4.8 m^2/min

26. 3 cm/s

27. 5000π cm^2/s

28. $\frac{1}{64\pi}$ cm/min

29. $20\sqrt[4]{3}$ cm^2/s

30. -1.5 cm/min

31. 1 m/s

32. $\frac{0.3}{\sqrt{3}}$ m/s

33. 90 km/h

34. $\frac{8}{15\pi}$ m/min