Cálculo A

Questões Conceituais

Obs: Lembre-se que:

(i) Uma função $f(x)$ é dita diferenciável em $x = a$ se $f'(a)$ existe.

(ii) Uma função $f(x)$ é dita diferenciável se $f'(x)$ existir para todo $x \in \text{Dom } f$.

1. Assuma que $f'(a)$ exista. Expresse
   (i) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}$ em termos de $f'(a)$.
   (ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ em termos de $f'(a)$.

2. Seja f uma função diferenciável em a. Analise se cada um dos limites abaixo existe ou não.
   (i) $\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x^2) - f(a)$
   (ii) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x^2}$
   (iii) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$
   (iv) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\sin \Delta x)-f(a)}{\sin \Delta x}$

3. Suponha que f é uma função par e diferenciável. Mostre que a derivada de f é uma função ímpar. Se $f'(a) = 2$, encontre então $f'(-a)$.

4. Suponha que f é uma função ímpar e diferenciável. Mostre que a derivada de f é uma função par. Se $f'(a) = 2$ encontre então $f'(-a)$.

5. (i) Suponha que f e g sejam funções tal que $f = g$ num intervalo aberto contendo a. Se $f'(a)$ existe, mostre que $g'(a)$ existe e que se tem $f'(a) = g'(a)$.
   (ii) Seja $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Usando (i) calcule $g'(x)$.

6. Suponha que f e g são funções tal que $f(a) = g(a)$, e assuma que $f'(a)$ exista. Pode-se concluir que se tem $f'(a) = g'(a)$? Explique.

7. Explique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.
   (i) Se uma função $f(x)$ tem derivada em $x = a$ (isto é $f'(a)$ existe) então seu gráfico tem uma reta tangente no ponto $(a, f(a))$.
   (ii) Se uma função $f(x)$ tem uma reta tangente no ponto $(a, f(a))$ então existe $f'(a)$.
   (iii) Se uma função $f(x)$ não tem reta tangente em $(a, f(a))$ então não existe $f'(a)$.
   (iv) Se uma função $f(x)$ não tem derivada em $x = a$ então ela não tem reta tangente em $(a, f(a))$.

8. Seja f uma função diferenciável em a. Seja
   $$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x \neq a \\ f'(a) & \text{se} \quad x = a \end{cases}$$
   Mostre que g é contínua em a.

9. Seja
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$
   Verifique se $f(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

10. Seja
    $$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$
    Verifique para que valores de n, ($n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(x)$ diferenciável em $x = 0$.

11. Seja
    $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$$
    Verifique se $f(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

12. (i) Seja $f(x) = |x|$. Usando a definição da função módulo, mostre que
    $$\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x} \quad \text{em } x \neq 0\ .$$
    Existe $\frac{d}{dx}|x|$ em $x = 0$?
    (ii) Seja $f(x) = |x|^n$. Mostre que
    $$\frac{d}{dx}|x|^n = n|x|^{n-1}\text{sgn}\, x$$
    onde a função $\text{sgn}\, x$ é definida por
    $$\text{sgn}\, x = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

13. * Seja $f(x)$ é uma função diferenciável. Mostre que
$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x)$$
nos pontos x em que se tem $f(x) \neq 0$. Existe a derivada de $|f(x)|$ nos pontos x onde $f(x) = 0$?

14. Verifique se $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $x = 0$.

15. Encontre $f'(x)$ se $f(x) = |x| + |x + 1|$.

16. Seja $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Será que se tem $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$?

17. Mostre que se uma equação $\phi(x, y) = 0$ pode ser resolvida em termos de x e y na forma $y = f(x)$ e $x = g(y)$ então tem-se
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Cálculo A - Lista 8'

1.

(i) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+(-h))-f(a)}{-(-h)}$

$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}$

Seja $\omega = -h$ $\therefore \begin{cases} h\to 0 \\ \omega\to 0 \end{cases}$ $\left|\; = -\underbrace{\lim_{\omega\to 0} \frac{f(a+\omega)-f(a)}{\omega}} \right.$

$= - f'(a)$

$\therefore$ $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = -f'(a)}$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \right\}$

$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}} - \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}}$

$= \quad f'(a) - \quad -f'(a) \quad \Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)}$$

2.

i) $\lim_{\Delta x\to 0} f(a+(\Delta x)^2) - f(a)$

Temos que

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Daí,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) - f(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x$$

$$= f'(a) \cdot 0$$

$$\left\{ \lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) - f(a) = 0 \right.$$

Daí, $\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x^2) - f(a) \overset{h=\Delta x^2}{=} \lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a))$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x^2) - f(a) = 0}$$

ii) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(\Delta x)^2} = ?$

Temos

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Delta x}}_{\to\infty}\right)$$

Vemos que o limite anterior pode existir ou não.

Por exemplo,

Se $f(x) = x^2$, temos que

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{a^2}+2a\Delta x+\Delta x^2-\cancel{a^2}}{\Delta x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{\Delta x^2}\left(1+\frac{2a}{\Delta x}\right)}{\cancel{\Delta x^2}}$$

$$= \infty$$

$f(x) = cte$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$$

Se $f(x) = x$ então

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a+\Delta x-a}{\Delta x^2}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\Delta x^{\cancel{2}}} = \nexists$$

logo, demos que

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x^2} \text{ pode não existir}}$$

iii) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a-\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = -f'(a)$ ver $\underline{\Delta(i)}$.

iv) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\sin \Delta x) - f(a)}{\sin \Delta x} =$

$h = \sin \Delta x$ $\displaystyle= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$\Delta x \to 0,\ h \to 0$

$= f'(a)$

$$\therefore \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\sin \Delta x) - f(a)}{\sin \Delta x} = f'(a)}$$

3. f é par, f é diferenciável

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\Leftrightarrows$$

$$f'(-x) = \lim_{z \to -x} \frac{f(z) - f(-x)}{z - (-x)}$$

$$= \lim_{z \to -x} \frac{f(z) - f(x)}{z + x} =$$

$z = -y$

$z \to -x$
$y \to x$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(-y) - f(x)}{-y + x}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{-(y - x)}$$

$$= - \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$= - f'(x)$$

$\therefore$

$$f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow \underline{f'(x) \text{ é impar}}.$$

$$f'(a) = 2 \Rightarrow f'(-a) = -f'(a) = -2$$

$$\therefore \underline{f'(-a) = -2}$$

4. f é ímpar e diferenciável.

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\Leftarrow$$

$$f'(-x) = \lim_{z \to -x} \frac{f(z) - f(-x)}{z - (-x)}$$

$f(-x) = -f(x)$

$$= \lim_{z \to -x} \frac{f(z) + f(x)}{z + x}$$

Seja $z = -y$

Então: $z \to -x$, $y \to x$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(-y) + f(x)}{-y + x}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{-f(y) + f(x)}{-y + x}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$= f'(x)$$

$\therefore$

$f'(-x) = f'(x) \Longrightarrow$ $f'(x)$ é par

$f'(a) = 2 \Longrightarrow f'(-a) = f'(a) = 2$.

5.

(i) $\begin{cases} U \equiv (a-\delta, a+\delta) \quad (\delta > 0) \\ f(x) = g(x), \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \\ f'(a) \text{ existe.} \end{cases}$

Seja,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Tomando $x \to a$ com $x \in (a-\delta, a+\delta)$
~~temos~~,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad \Big\downarrow\, x \in (a-\delta, a+\delta)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$$\therefore \boxed{g'(a) = f'(a)}$$

(ii) $g(x) = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}$.

$g(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aqui, $f(x) = 1$ e $g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Daí,

$$g'(x) = f'(x) = 0$$

$$\therefore \boxed{g'(x) = 0}$$

6. $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) \text{ existe} \end{cases}$

Não.

Seja $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

Temos que $f(1) = g(1)$

Mas $f'(1) = 2 \neq 3 = g'(1)$

7.

(i) $f'(a)$ existe $\Longrightarrow$ $y = f'(a)x + q$

$f(a) = f'(a)a + q$

$q = f(a) - f'(a)a$

$\therefore$ $\boxed{y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)}$

é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

$\therefore$ (i) é verdadeiro

(ii) $f(x)$ tem reta tangente em $(a, f(a))$.

Seja $f(x) = x^{1/3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$

$f'(0)$ $\nexists$

Mas existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^{1/3}$ em $x = 0$.

(ii) Falso

(iii) Se $f(x)$ não tem reta tangente em $(a, f(a))$, então $f'(a)$ não existe.

Verdade

Suponha que $f'(a)$ exista.

Então existe reta tangente em $(a, f(a))$ o que contraria a hipótese de que $f(x)$ não tem reta tangente em $(a, f(a))$, logo devemos concluir que $f'(a)$ $\nexists$.

iv) Se $f'(a)$ $\nexists$ então ela não tem reta tangente em $(a, f(a))$.

Falso

$f(x) = x^{1/3}$ não tem derivada em $x = 0$ mas admite reta tangente em $x = 0$

8. $f(x)$; $f'(a)$ existe.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} , & x \neq a \\ f'(a) , & x = a . \end{cases}$$

g será contínua em a se $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.
Por definição de $g(x)$ temos que,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$= g(a)$$

$\therefore$

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \Rightarrow \boxed{g \text{ é contínua em } x = a}$$

---

9. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore$ $f'(0) = 0 \Rightarrow$ f é diferenciável em $x = 0$

10.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Seja $n = 1$</u>.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \sin 1/x}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \quad \nexists$$

<u>Seja $n > 1$</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} =$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^{n-1}}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{\text{limitado (entre -1 e 1)}}$$

$$= 0$$

Conclusão

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Se } n = 1 & f'(0) \nexists \\ \text{Se } n > 1 & f'(0) = 0 \end{array}}$$

1324

11. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad , \quad f(0) = 0$$

→ Seja $x \to 0$ com $x \in \mathbb{Q}$:

Então,

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \in \mathbb{Q})}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \in \mathbb{Q})}} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$$

→ Seja $x \to 0$ com $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, então,

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q})}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q})}} \frac{0}{x} = 0$$

Vemos que $x \to 0$, $\forall x$ tem-se

$$\underline{\underline{f'(0) = 0}}.$$

12.

(i) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{cases} \Big\} \neq$$

i.e.,

$$\boxed{f'(0) = \frac{d}{dx}|x| \Big|_{x=0} \text{ não existe}}$$

Se $x > 0$:

$$\begin{cases} x > 0, \\ z \to x \Rightarrow |z| > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{z - x}{z - x} = 1$$

$$\therefore \boxed{f'(x) = 1, \quad x > 0}$$

Se $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{-z - (-x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{-z + x}{z - x} = -1$$

$$\boxed{f'(x) = -1 \ , \ x < 0}$$

isto é,

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 \ , & x > 0 \\ -1 \ , & x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x}}$$ se $x \neq 0$

(ii) $f(x) = |x|^n \quad ; \quad n > 1$

Seja $x > 0$:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{|z|^n - |x|^n}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \underbrace{z^{n-1} + x z^{n-2} + \dots x^{n-2} z + x^{n-1}}_{n \text{ termos}}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}$$

$$\| f'(x) = n x^{n-1} \ , \ x > 0 \|$$

Seja $x < 0$:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{|z|^n - |x|^n}{z - x}$$

$x < 0$
$z \to x \Rightarrow z < 0$

$$= \lim_{z \to x} \frac{(-z)^n - (-x)^n}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{(-1)^n (z^n - x^n)}{z - x}$$

$$= \lim_{z \to x} (-1)^n (z^{n-1} + x z^{n-2} + \dots + x^{n-1})$$

$$// f'(x) = (-1)^n n x^{n-1} , \quad x < 0 //$$

Seja $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^n}{x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} (-1)^n \frac{x^n}{x} = 0 \end{cases}$$

$$// f'(0) = 0 //$$

$$f'(x) = \begin{cases} n x^{n-1} , & x > 0 \\ 0 , & x = 0 \\ (-1)^n n x^{n-1} , & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Mas

$x>0: \quad nx^{n-1} = n|x|^{n-1}$

$x<0: \quad (-1)^n n x^{n-1} = -\underline{(-1)^{n-1}} n \underline{x^{n-1}}$

$= -n(-x)^{n-1}$

$= -n|x|^{n-1} \quad (x<0)$

$\therefore$

$$f'(x) = \begin{cases} n|x|^{n-1}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -n|x|^{n-1}, & x<0 \end{cases}$$

$\therefore$

$$\boxed{f'(x) = n|x|^{n-1}\,\mathrm{sgn}\,x}$$

onde

$$\mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

13. $f(x)$ é diferenciável.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Daí seja

$$g(x) = |f(x)|;$$

Seja $\underline{a}$ tq. $f(a) \neq 0$.

Então

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a}$$

f diferenciável em $x = a \Rightarrow f$ é contínua em $x = a$,

Seja então $f(a) > 0$. Então existe uma vizinhança de $\underline{a}$ onde se tem

$$f(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Logo,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\therefore \left\| \frac{d}{dx} |f(x)| \Big|_{x=a} = f'(a) \quad \text{se } f(a) > 0 \right\|$$

Se $f(a) < 0$ tem-se que $f(x) < 0$ para $x \in (a-\delta, a+\delta)$ para um certo $\delta > 0$.

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-f(x) - (-f(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-f(x) + f(a)}{x-a}$$

$$= -\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$\boxed{g'(a) = -f'(a)} \quad \text{se } f(a) < 0$$

$\therefore$

$$\boxed{\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x), \quad \text{se } f(x) \neq 0}$$

$\Rightarrow$ Seja $f(a) = 0$.

Neste caso $\frac{d}{dx}|f(x)|$ poderá existir ou não.

Por exemplo, se $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ para um certo $\delta > 0$

então,

$$\left.\frac{d}{dx}|f(x)|\right|_{x=a} = \lim_{x\to a} \frac{|f(x)| - \overset{0}{|f(a)|}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{x-a} = \ldots$$

$$\frac{d}{dx}|f(x)|\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$= f'(a)$$

$$\Leftarrow$$

!! $\frac{d}{dx}|f(x)|\Big|_{x=a} = f'(a)$ se $f(a)=0$ e $f(x)\geq 0$ numa vizinhança de a.

Analogamente, se $f(x) < 0$ numa vizinhança de a nós temos que

$$\frac{d}{dx}|f(x)|\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} -\frac{f(x)}{x-a}$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$= -f'(a)$$

!! $\frac{d}{dx}|f(x)|_{x=a} = -f'(a)$ se $f(a)=0$ e $f(x)<0$ numa vizinhança de $x=a$.

Se tivermos o caso do tipo

$$\text{I} \begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x > a \\ f(x) < 0 & \text{para } x < a \end{cases}$$

ou

$$\text{II} \begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x > a \\ f(x) > 0 & \text{para } x < a \end{cases}$$

vê-se que

caso I: $\displaystyle \frac{d}{dx}|f(x)|\Big|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a}$

limite a direita: $\displaystyle \lim_{x \to a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a}$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - 0}{x-a}$$

$$= f'(a)$$

limite a esquerda: $\displaystyle \lim_{x \to a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a}$ $\neq$ a menos que $f'(a) = 0$

$$= \lim_{x \to a^-} \frac{-f(x) + f(a)}{x-a}$$

$$= -f'(a)$$

logo $\boxed{\frac{d}{dx}|f(x)| \nexists}$

14. $f(x) = x|x|$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

$\therefore \quad f'(0) = 0 \implies \boxed{f(x) = x|x| \text{ é diferenciável em } x = 0}$

15. $f(x) = |x| + |x+1|$

Aqui, seja

$$\begin{cases} g(x) = |x| \implies g'(x) = \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\[2ex] h(x) = |x+1| \implies h'(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}, & x \neq -1 \end{cases}$$

→ Então se $\underline{x \neq 0 \text{ e } x \neq -1}$ temos:

$$\left\{ f'(x) = g'(x) + h'(x) = \underline{\underline{\frac{|x|}{x} + \frac{|x+1|}{x+1}}} \right.$$

→ $\underline{\text{Se } x = 0 \text{ e } x = -1 \quad f'(x) \nexists}$

16. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

Sejs $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$

Dai,

$$f(z) - f(x) = f'(x)(z - x) + R(z$$