Cálculo B - Lista 7

Integrais impróprias I (intervalo de integração é ilimitado)

Nos exercícios 1 a 18, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$
2. $\int_{-\infty}^1 e^x dx$
3. $\int_{-\infty}^0 x5^{-x^2}dx$
4. $\int_1^\infty 2^{-x}dx$
5. $\int_0^\infty x2^{-x}dx$
6. $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$
7. $\int_{-\infty}^\infty x\cosh x dx$
8. $\int_{-\infty}^0 x^2e^x dx$
9. $\int_5^\infty \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$
10. $\int_{-\infty}^\infty \frac{3xdx}{(3x^2+2)^3}$
11. $\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{3dx}{x^2+9}$
12. $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$
13. $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$
14. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$
15. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
16. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{16+x^2}$
17. $\int_1^\infty \ln x dx$
18. $\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$
19. Calcule se existir:
    (a) $\int_{-\infty}^\infty \sin x dx$
    (b) $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^r \sin x dx$
20. Prove que se $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ for convergente, então $\int_{-b}^\infty f(-x)dx$ também será convergente e terá o mesmo valor.
21. Mostre que a integral imprópria
$$\int_{-\infty}^\infty x(1+x^2)^{-2}dx$$
é convergente e a integral imprópria
$$\int_{-\infty}^\infty x(1+x^2)^{-1}dx$$
é divergente.
22. Prove que a integral imprópria
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$$
será convergente se e somente se $n > 1$.
23. (a) Suponha que f e g são contínuas em $[a,\infty)$. Mostre que se $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ convergem, então $\int_a^\infty (f(x)+g(x))dx$ converge.
(b) Mostre que se $\int_a^\infty f(x)dx$ converge então $\int_a^\infty cf(x)dx$ também converge para todo c.
24. Sejam f e g contínuas em $[a,\infty)$ e assuma que $0 \le g(x) \le f(x)$ para $x \ge a$. Mostre que se $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$, então $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$ e consequentemente $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.
25. Usando o resultado (24) mostre que cada uma das integrais a seguir divergem.
(a)
$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^{1/2}}\,dx$$
(b)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2+\sin x}}\,dx$$
(c)
$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$
(d)
$$\int_2^\infty \frac{1}{(1+x)\ln x}\,dx$$
26. Seja
$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$
$n \in N$. Usando integração por partes mostre que $I_n = nI_{n-1}$ para $n \ge 1$. Daí, mostre que $I_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$

Respostas

1. 1
2. e
3. $-\frac{1}{2\ln 5}$
4. $\frac{1}{2\ln 2}$
5. $\frac{1}{(\ln 2)^2}$
6. ∞ (divergente)
7. diverge
8. 2
9. $-\infty$ (diverge)
10. 0
11. $\frac{\pi}{3}$
12. ∞ (diverge)
13. 2
14. 0
15. 1
16. $\frac{\pi}{4}$
17. ∞ (diverge)
18. $\frac{1}{2}$
19. (a) $\nexists$

(b) 0