Cálculo B - Lista 16

I. Extremos locais de uma função

Nos exercícios a seguir encontre os pontos críticos de cada função e determine se ele é um mínimo local, máximo local ou um ponto de sela.

1. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$
2. $f(x,y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$
3. $f(x,y) = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 6x - 10y + 5$
4. $f(x,y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$
5. $f(x,y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2$
6. $f(x,y) = 4xy + 2x^2y - xy^2$
7. $f(x,y) = 1 - x^4 - 3y^3$
8. $f(x,y) = e^x \sin y$
9. $f(x,y) = |x| + |y|$
10. $f(x,y) = e^{xy}$

II. Extremos de uma função em um domínio compacto

Nos exercícios seguintes encontre os valores extremos de f em $D \subset R^2$

11. $f(x,y) = x^2 - y^2$. $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
12. $f(x,y) = 2\sin x + 3\cos y$. $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
13. $f(x,y) = xy - x^2$, $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$
14. $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$. $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$
15. $f(x,y) = x^2 - 3y + y^3$. $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + 4y^2 \leq 36\}$
16. $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y$. $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3\}$
17. $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$. D é a região triangular fechada com vértices $(0,0), (4,0), (4,5)$.
18. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$. $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$

III. Extremos de uma função sujeito a uma certa condição

Nos exercícios a seguir encontre os extremos da função sujeito a condição dada

19. $f(x,y) = 4x + 3y$ com $x^2 + y^2 = 25$
20. $f(x,y) = xy$ com $x^2 + 3y^2 = 6$
21. $f(x,y,z) = x + 2y - 2z$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
22. $f(x,y,z) = xyz$ com $xy + xz + 3yz = 4$
23. $f(x,y,z) = 2xy + 4xz + yz$ com $xyz = 1$
24. $f(x,y) = x + y^2$ com $x^2 + y^2 = 4$
25. $f(x,y) = x^3 + 2y^3$ com $x^2 + y^2 = 1$
26. $f(x,y) = x^2 - y^2$ com $x^2 + y^2 = 4$

27. $f(x, y) = x^2 + y^2$ com $2x + 3y = 6$

28. $f(x, y, z) = x + y + z$ com $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

IV. Problemas de maximização e minimização

29. Encontre as dimensões de uma caixa retangular que tenha volume 1000 e uma área mínima.

30. Encontre os pontos da superfície $xyz = 1$ que estão mais próximos da origem. Há algum ponto que esteja mais afastado da origem?

31. Encontre as dimensões de uma caixa retangular com volume máximo e que tenha área superficial 600.

32. A soma de três números positivos é 120. Qual é o valor máximo de seu produto?

33. Um prédio tem a forma de uma caixa retangular com volume 8000 ft^3. O custo anual de refrigeração e aquecimento do prédio é: \$2 por ft^2 no topo do prédio, \$2 por ft^2 na frente e na parte de trás do prédio, \$4 por ft^2 na parte lateral do prédio. Determine as dimensões do prédio que minimiza os gastos anuais com refrigeração e aquecimento.

34. Uma caixa retangular tem sua base no plano xy e está inscrito sob o gráfico do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$. Encontre o maior volume possível da caixa.

Respostas

1. $(3, -2)$ é pto. onde f assume um mínimo local

2. $(-3, 2)$ é ponto de sela da f

3. $(11, -8)$ é ponto onde f assume um máximo local

4. $(1, 4)$ é ponto onde f assume um mínimo local
   $(5, 0)$, (-3,0) são pontos de sela da f

5. $(0, 0)$ é ponto onde f assume um mínimo local
   $(2, 2)$ e $(\frac{1}{2}, -1)$ são pontos de sela da f

6. $(0, 0), (0, 4)$ e $(-2, 0)$ são pontos de sela da f
   $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ é ponto onde f assume um mínimo local

7. $(0, 0)$ é ponto de sela da f

8. f não apresenta pontos críticos

9. $(0, y)$ e $(x, 0)$ são pontos críticos pois as derivadas f_x e f_y não estão definidas nestes valores. Se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ temos que estes pontos críticos não são ponto de sela da f e também não estão associados a extremos locais da f. Contudo, $(0, 0)$ é ponto onde f assume um mínimo local.

10. $(0, 0)$ é ponto de sela da f

11. Máximo da f: $1 = f(\pm 1, 0)$, Mínimo da f: $-1 = f(0, 1)$

12. Máximo da f: $5 = f(\frac{\pi}{2}, 0)$, Mínimo da f: $0 = f(\pi, \pm\frac{\pi}{2}) = f(0, \pm\frac{\pi}{2})$

13. Máximo da f: $1/4 = f(\frac{1}{2}, 1)$, Mínimo da f: $-1 = f(1, 0)$

14. Máximo da f: $2 = f(2, 0)$, Mínimo da f: $-2 = f(1, 0)$

15. Máximo da f: $\frac{986}{27} = f(\pm\frac{\sqrt{320}}{3}, -\frac{1}{3})$, Mínimo da f: $-18 = f(0, -3)$

16. Máximo da f: $18 = f(3, 3)$, Mínimo da f: $-1 = f(0, 1)$

17. Máximo da f: $13 = f(4, 5)$, Mínimo da f: $-7 = f(4, 0)$

18. Máximo da f: $7 = f(-1, 1)$, Mínimo da f: $4 = f(0, 0)$

19. Máximo da f sujeito à condição dada: $25 = f(4, 3)$.
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-25 = f(-4, -3)$

20. Máximo da f sujeito à condição dada: $\sqrt{3} = f(\sqrt{3}, 1) = f(-\sqrt{3}, -1)$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3}, 1) = f(\sqrt{3}, -1)$

21. Máximo da f sujeito à condição dada: $9 = f(1, 2, -2)$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-9 = f(-1, -2, 2)$

22. Máximo da f sujeito à condição dada: $\frac{8}{9} = f(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-\frac{8}{9} = f(-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

23. Mínimo da f sujeito à condição dada: $6 = f(\frac{1}{2}, 2, 1)$. (Porque não há máximo?)

24. Máximo da f sujeito à condição dada: $\frac{17}{4} = f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-2 = f(-2, 0)$

25. Máximo da f sujeito à condição dada: $2 = f(0, 1)$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-2 = f(0, -1)$

26. Máximo da f sujeito à condição dada: $4 = f(\pm 2, 0)$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-4 = f(0, \pm 2)$

27. Mínimo da f sujeito à condição dada: $\frac{36}{13} = f(\frac{12}{13}, \frac{36}{13})$

28. Máximo da f sujeito à condição dada: $7 = f(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7})$
    Mínimo da f sujeito à condição dada: $-7 = f(-\frac{36}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{4}{7})$

29. $x = 10, y = 10, z = 10$

30. $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1)$

31. $x = y = z = 10$

32. 64000

33. O prédio deve ter dimensões 40(comprimento), 20(largura) e 10(altura).

34. $\frac{1}{2}$