Extremos absolutos e locais

- **Def.** : **Máximo e mínimo absoluto**

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: função

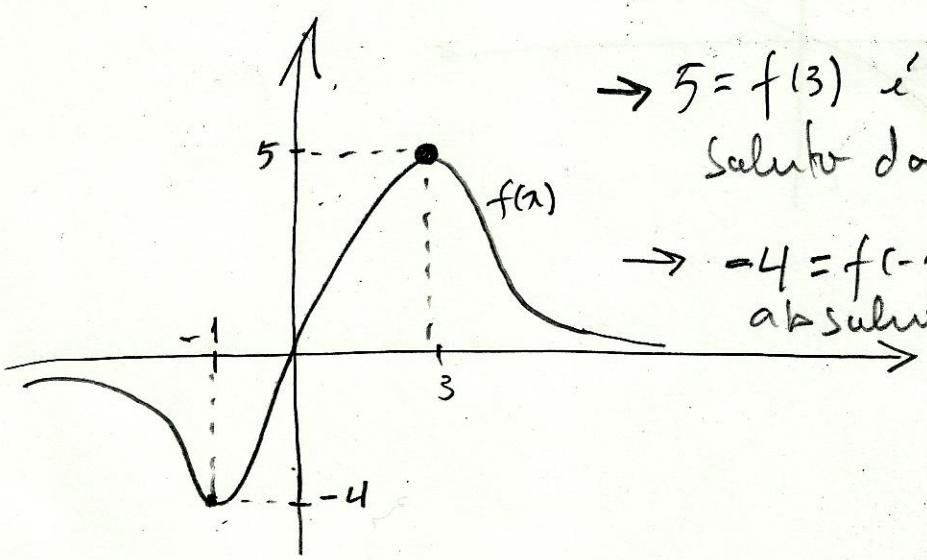
Seja $c \in I$

i) $f(c)$ é um **máximo absoluto** da função f se $f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in I$

$x = c$ é um ponto onde f assume **máximo absoluto**

ii) $f(c)$ é dito um **mínimo absoluto** da função f se $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in I$

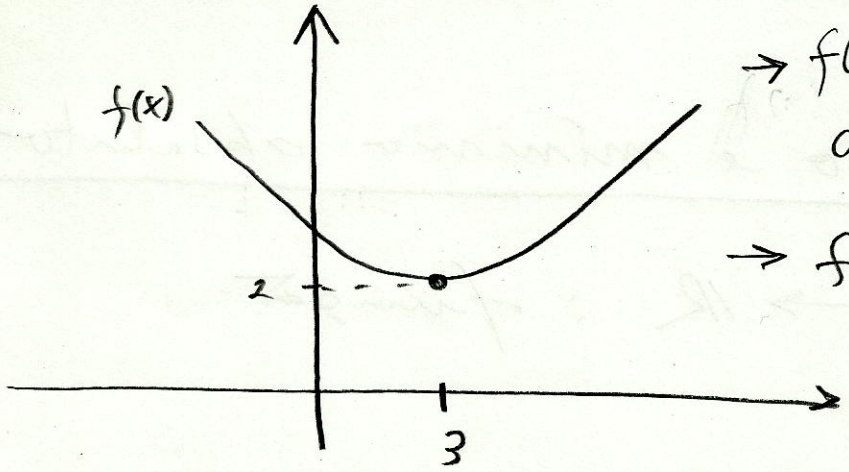
- **Ex.**



→ $5 = f(3)$ é Máximo absoluto da f

→ $-4 = f(-1)$ é Mínimo absoluto da f

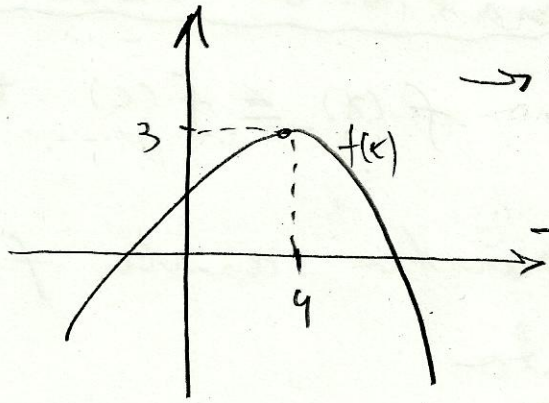
• Ex.



→ $f(3) = 2$ é mínimo absoluto da f

→ f não tem máximo absoluto

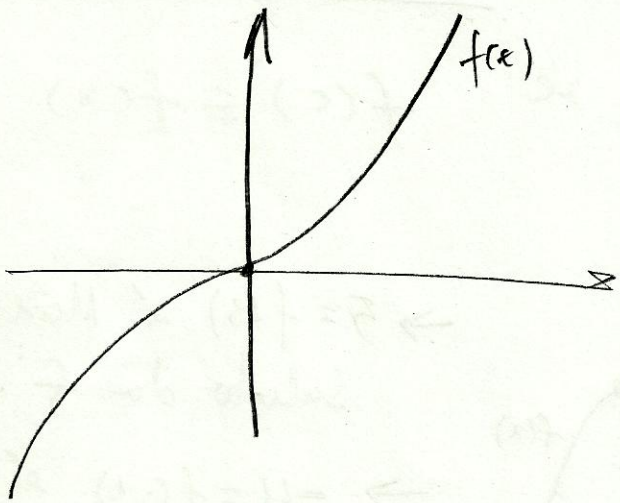
• Ex. :



→ $f(4) = 3$ é máximo absoluto da f

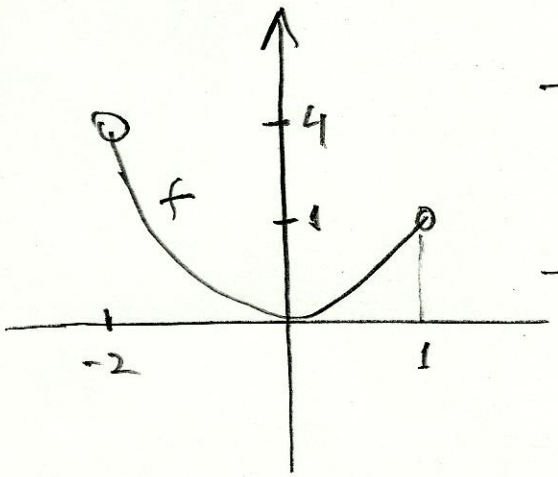
→ f não tem mínimo absoluto

• Ex.



→ f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto

• Ex.



→ $f(0) = 0$ é mínimo absoluto da f

→ f não tem máximo absoluto.

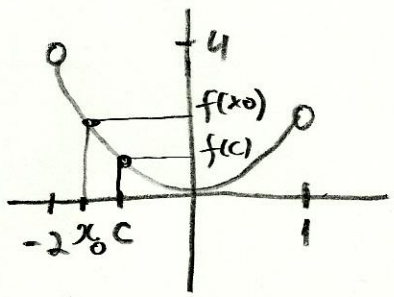
Note que $\text{Im } f = [0, 4)$. Vemos do gráfico que podemos tomar $f(x)$ tão próxima de 4 quanto se queira bastando tomarmos x suficientemente próxima de -2.

Contudo $f(x) < 4$, $\forall x \in (-2, 1)$, o que nos diz que <u>não</u> existe $c \in (-2, 1)$ tal que

$$f(x) \leq f(c) \quad , \forall x \in (-2, 1)$$

Com efeito, dado $c \in (-2, 1)$ vemos neste caso que tomando x_0 satisfazendo $-2 < x_0 < c$ temos

$$f(c) < f(x_0),$$



logo $f(c)$ <u>não</u> seria máximo absoluto da f.

Def. : Máximo e mínimo local

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja $c \in I$

i) $f(c)$ é um <u>máximo local</u> da f se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall\, x \in (c-\delta, c+\delta)$$

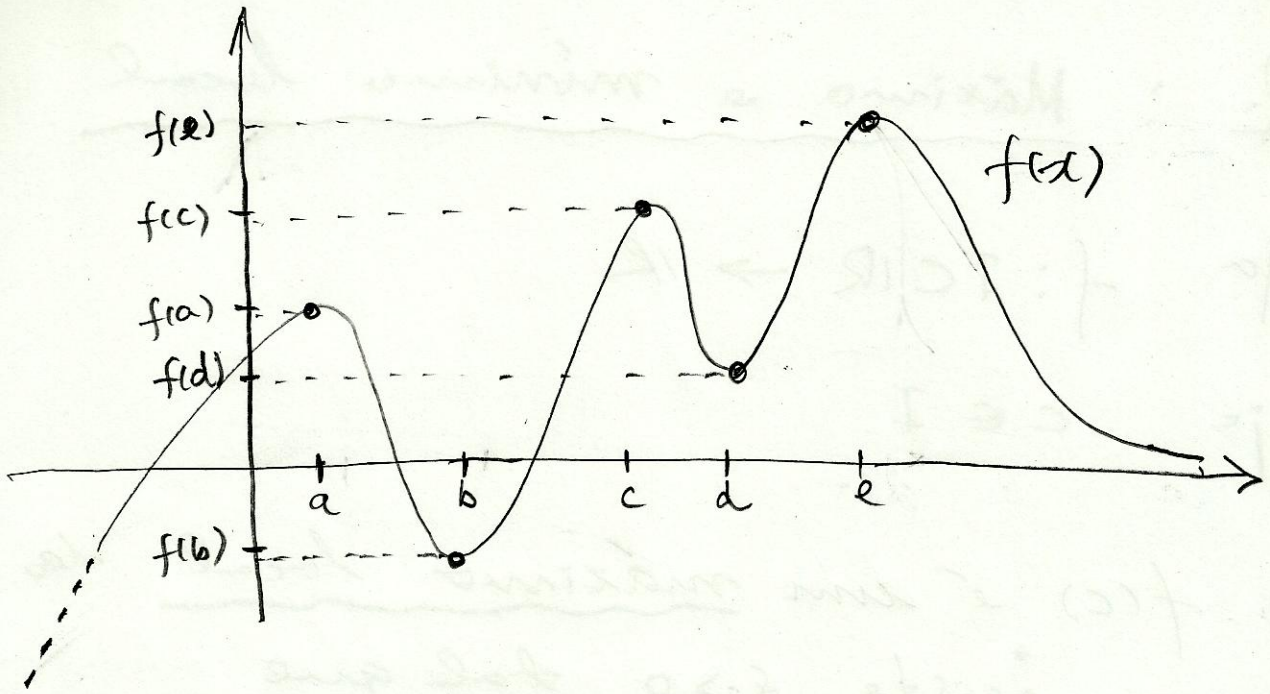
$x = c$ é dito um <u>ponto</u> onde f <u>assume</u> um máximo local.

ii) $f(c)$ é um <u>mínimo local</u> da f se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall\, x \in (c-\delta, c+\delta)$$

$x = c$ é dito um <u>ponto</u> onde f <u>assume</u> um mínimo local.

Ex.



Máximos locais da f : f(a), f(c), f(e)

Mínimos locais da f : f(b), f(d)

Máximo absoluto da f : f(e)

Mínimo absoluto da f : não existe

Obs.: Pontos críticos de uma função

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$c \in I$ é dito um <u>ponto crítico</u> de f se:

i) $\exists \delta > 0$ tq. $(c-\delta, c+\delta) \subset I$

ii) $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$

Obs.

Condição (i) nos diz que um ponto crítico de uma função, caso exista, é sempre um ponto no <u>"interior"</u> do domínio da função.

Assim se $\text{dom} f = I = [a,b]$ e c é ponto crítico de f, condição (i) nos diz que $a < c < b$.

O mesmo vale se tivéssemos $I = [a,b)$, ou $I = (a,b]$ ou $I = (a,b)$.

• Res. : Critério para identificar extremos locais da função:

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Os candidatos a extremos locais da função são os pontos críticos da função.

2. Identificado os pontos críticos da f pode-se utilizar dois critérios para se identificar se um ponto crítico está associado a um extremo local da função. São eles:

Teste da Derivada Primeira

Teste da Derivada Segunda

2.1 : Teste da Derivada Primeira

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja c pto. crítico de f, isto é,

$$f'(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) \nexists$$

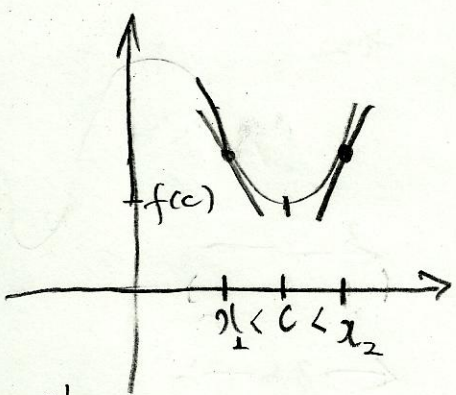
Temos:

i) Se $\exists \delta > 0$ tq.

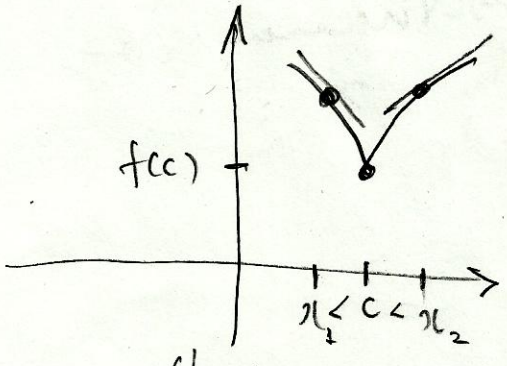
$$f'(x) < 0 \,, \forall x \,, c - \delta < x < c$$

$$f'(x) > 0 \,, \forall x \,, c < x < c + \delta$$

então $f(c)$ é mínimo local da função.



$f'(x_1) < 0$
$f'(x_2) > 0$ $\quad (f'(c) = 0)$



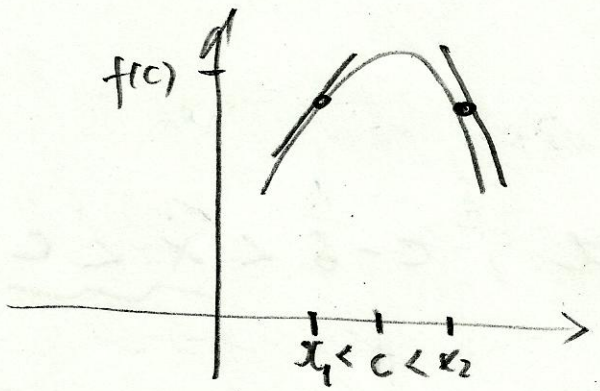
$f'(x_1) < 0$
$f'(x_2) > 0$ $\quad (f'(c) \nexists)$

(ii) se $\exists \delta > 0$ tq.

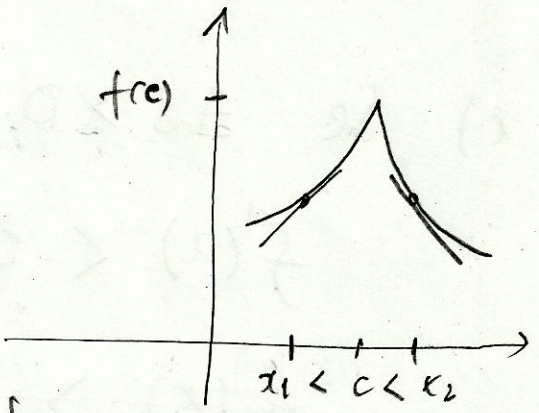
$f'(x) > 0$, $\forall x$, $c - \delta < x < c$

$f'(x) < 0$, $\forall x$, $c < x < c + \delta$

então $f(c)$ é <u>máxima local</u> da função.



$\begin{cases} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases}$ $(f'(c) = 0)$



$\begin{cases} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases}$ $(f'(c) \nexists)$

iii) Se $\exists \delta > 0$ tq.

$$f'(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

ou

$$f'(x) < 0 \quad , \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

então f(c) não é extremo local da função.

O que a condição (iii) nos diz é que se a derivada da f não mudar de sinal para pontos numa vizinhança de $x=c$ então f(c) NÃO é extremo local da função.

2.2. : Teste da Derivada Segunda

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja c, ponto crítico da f,

satisfazendo $f'(c) = 0$.

(O teste da derivada segunda não se aplica para pontos críticos onde a derivada não existe)

Temos:

i) Se $f''(c) < 0$ então $f(c)$ é <u>máximo local</u> da f

ii) Se $f''(c) > 0$ então $f(c)$ é <u>mínimo local</u> da f

iii) Se $f''(c) = 0$ <u>nada se pode afirmar</u> sobre $f(c)$. Neste caso devemos usar o teste da derivada primeira ou a definição de extremo local.

Ex. Seja $f(x) = x^3 - 3x - 2$.
Use o teste da derivada primeira para identificar os extremos locais da função, caso existam.

Solução

Primeiro, identificamos os pontos críticos da função, que são os candidatos a extremos locais da função:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

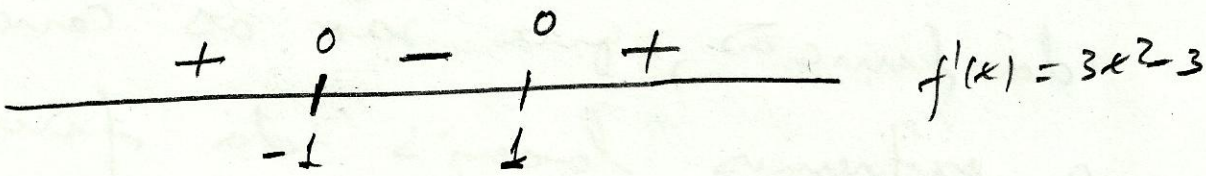
$\rightarrow f'(x) \nexists \rightarrow$ não se aplica

Temos então por pontos críticos apenas os valores $x = 1$, $x = -1$.

Para cada ponto crítico obtido devemos aplicar o teste da derivada primeira.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 3$

Aqui, uma análise do sinal de $f'(x) = 3x^2 - 3$ segue-se do diagrama:



o que nos dá:

$0 = f(-1)$ é <u>máximo local</u> da f

pois $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < -1 \\ f'(x) < 0 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{c} + \quad - \\ \hline -1 \\ \longrightarrow \\ x \end{array} \right)$

$-4 = f(1)$ é <u>mínimo local</u> da f

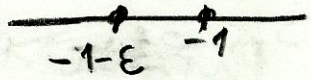
pois $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x < 1 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline 1 \\ \longrightarrow \\ x \end{array} \right)$

Obs. Neste exemplo, poderíamos também ter feito a análise da seguinte forma:

Análise de $c = -1$.

Afim de tomarmos um x genérico que seja menor que -1, mas próximo de -1, (i.e. tal que se tenha $-1+\delta < x < -1$) escrevemos

$$x = -1 - \varepsilon$$



com $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno (i.e. $\varepsilon \to 0^+$)

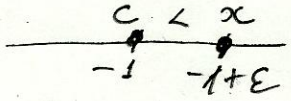
Daí

$$f'(-1-\varepsilon) = 3\underbrace{(-1-\varepsilon)^2}_{\text{positivo maior que 1}} - 3 > 0 \quad (*)$$

Analogamente, tomamos x genérico entre $-1 < x < -1+\delta$ escrevendo

$$x = -1 + \varepsilon \quad \text{com} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon \to 0^+$$

Daí,



$$f'(-1+\varepsilon) = 3\underbrace{(-1+\varepsilon)^2}_{\text{positivo menor que } 1} - 3 < 0 \quad (**)$$

i.e., de (*) e (**) temos:

$$\begin{cases} f'(\overbrace{-1-\varepsilon}^{x}) > 0 \;, & \underline{\underline{x = -1-\varepsilon < -1}} \\ f'(\underbrace{-1+\varepsilon}_{x}) < 0 \;, & \underline{\underline{x = -1+\varepsilon > -1}} \end{cases}$$

e assim, o teste da derivada primeira nos diz que

$f(-1)$ é máximo local da função

Análise de $c = 1$:

Segue-se um procedimento análogo:

Toma-se $x = 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0^+$

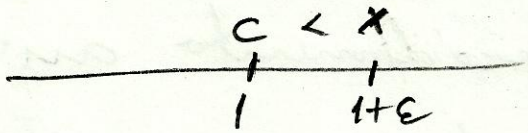
$$\underset{1-\varepsilon}{x} \quad \underset{1}{c}$$

Daí:

$$f'(1-\varepsilon) = 3\underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{\text{positivo menor que 1}} - 3 < 0 \quad (3*)$$

e também consideremos

$$x = 1+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \to 0^+$$



$\therefore$

$$f'(1+\varepsilon) = 3\underbrace{(1+\varepsilon)^2}_{\text{positivo maior que 1}} - 3 > 0 \quad (4*)$$

De $(3*)$ e $(4*)$ temos:

$$\begin{cases} f'(\overbrace{1-\varepsilon}^{x}) < 0, & \underline{\underline{x = 1-\varepsilon < +1}} \\ f'(\underbrace{1+\varepsilon}_{x}) > 0, & \underline{\underline{x = 1+\varepsilon > +1}} \end{cases}$$

e assim, o teste da derivada primeira nos diz que

$f(1)$ é mínimo local da função.

→ Vemos que a análise dos extremos locais da função, pela uso do Teste da derivada primeira, é mais direta de ser feito pela análise do sinal da derivada da f do que pelo procedimento anterior considerando $x = c - \varepsilon$ e $x = c + \varepsilon$.

Ex. Refaça o exemplo anterior, agora usando o teste da derivada segunda.

Solução

$f(x) = x^3 - 3x - 2$. Já vimos que:

$x = 1$, $x = -1$ são pontos críticos.

Usando o teste da derivada segunda calculamos

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 3) = 6x$$

Daí:

Análise de $c = 1$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

$-4 = f(1)$ é mínimo local de f

Análise de $c = -1$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$$

$\therefore$ $0 = f(-1)$ é máximo local de f

Critério para se determinar os extremos absolutos de uma função

Em geral, não há um procedimento sistemático para se obter os extremos absolutos de uma função.

Contudo, se f for contínua e definida em um intervalo fechado podemos usar o seguinte resultado:

Res.: Teorema do valor extremo

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua

$I = [a, b]$ (intervalo fechado)

Então temos que f admite um máximo absoluto e um mínimo absoluto no intervalo I.

Neste caso, os extremos absolutos da função $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ocorrem em pontos que podem estar:

→ Nos extremos do intervalo fechado, isto é, ocorrem em $x=a$ e $x=b$.

ou

→ no interior do intervalo, isto é, ocorrem em pontos c tal que $a<c<b$, isto é, neste caso correspondem aos pontos críticos da função.

Assim, o problema de se determinar os extremos absolutos de uma função contínua e definida em um intervalo fechado $[a,b]$, consiste em

i) Determinar os pontos críticos da função, por exemplo, c_i.

ii) Avaliar $f(a)$, $f(b)$, $f(c_i)$

a e b extremos do intervalo

c_i pto. crítico

iii) O Máximo e mínimo <u>absoluto</u> de f é obtido por inspeção entre os valores $f(a)$, $f(b)$ e $f(c_i)$.

<u>Ex:</u> Seja $f(x) = x^3 - 12x + 3$

$\text{Dom } f = [0,3]$

Determine os extremos absolutos de f.

<u>Solução</u>

Temos que $f(x) = x^3 - 12x + 3$ é função contínua e está definida em um intervalo fechado $I = [0,3]$.

Assim, o teorema do valor extremo nos garante que f admite um máximo e mínimo absoluto em $[0,3]$.

Para se determinar os extremos absolutos da f inicialmente determinamos os pontos críticos da f:

(Passo (i))

$$f(x) = x^3 - 12x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$$

$$3(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$f'(x) \nexists \Rightarrow \text{não se aplica}$$

Assim, os únicos pontos críticos da f são $x = +2$ e $x = -2$.

Uma vez que $x = -2 \notin \text{Dom } f = [0,3]$ consideraremos apenas

$$x = 2.$$

Temos então:

Nos extremos do intervalo:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(3) = -6 \end{cases}$$

No ponto crítico:

$$f(2) = -13$$

Por inspeção vemos que:

$f(0) = 3$ é Máximo absoluto de f

$f(2) = -13$ é Mínimo absoluto de f

(Em particular, $f(2)$ também é mínimo local da f, pois $x=2$ sendo ponto crítico da f e ponto no interior do intervalo $[0,3]$)

Def: Função crescente / decrescente em um intervalo

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

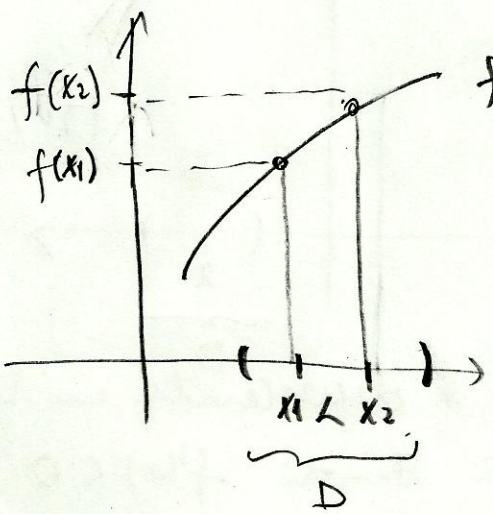
Seja $D \subset I$.

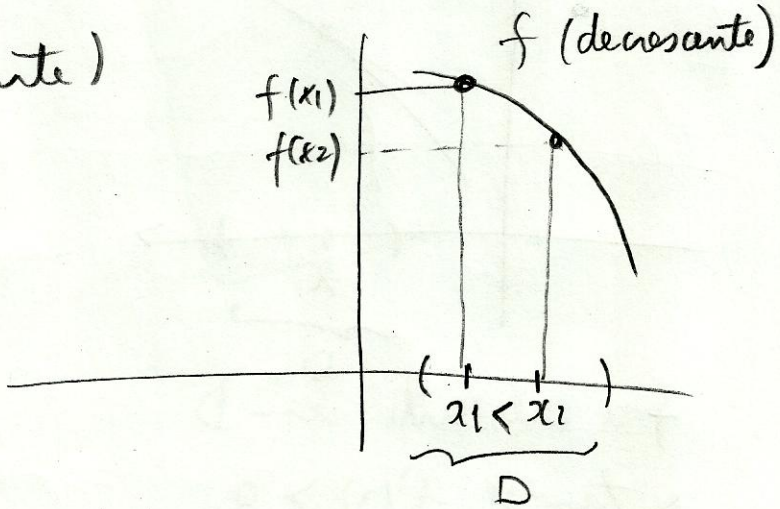
i) f é crescente no intervalo D se

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \forall \; x_1 < x_2, \; x_1, x_2 \in D$$

ii) f é decrescente no intervalo D se

$$f(x_2) < f(x_1) \quad \forall \; x_1 < x_2, \; x_1, x_2 \in D$$





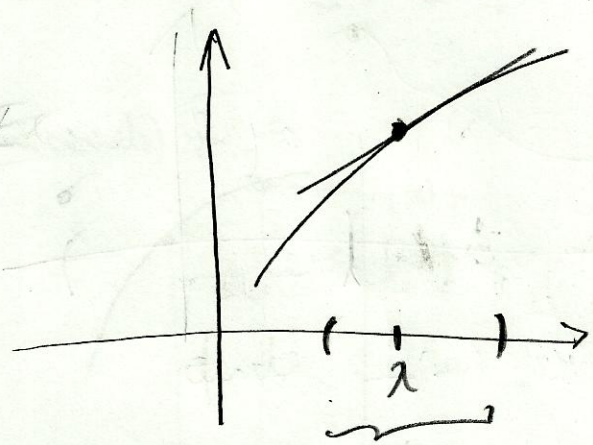
• Res.: Critério para se determinar os intervalos onde f é crescente ou decrescente

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

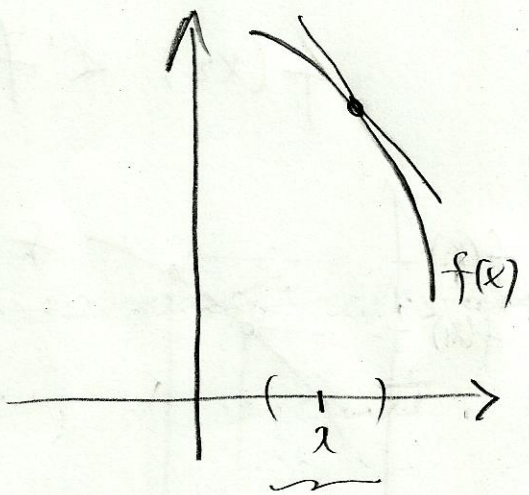
Seja $D \subset I$.

i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in D$ então f é crescente em D.

ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in D$ então f é decrescente em D.



f é crescente em D e tem-se $f'(x) > 0$ $\forall x \in D$.



f é decrescente em D e tem-se $f'(x) < 0$ $\forall x \in D$.

Ex. Seja $f(x) = x^3$.

Determinar, caso existam, os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente.

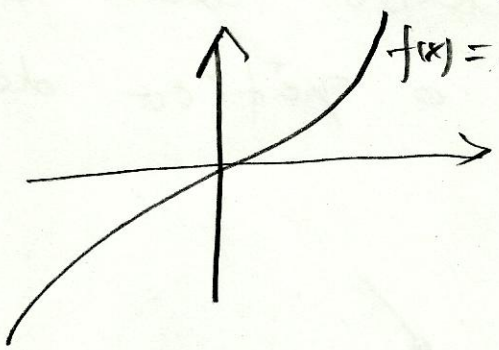
Solução

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 \\ \text{Dom } f = \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

Temos que $f'(x) = 3x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x) = x^3$ é <u>crescente</u> $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tal comportamento se verifica também pela análise da gráfica de $f(x) = x^3$:



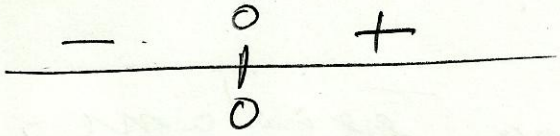
$f(x)$ é crescente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ex. Analise os intervalos onde $f(x) = x^2$ crescente ou decrescente.

Solução: $f(x) = x^2$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

$\therefore$ $f'(x) = 2x$

Da análise do sinal de $f'(x) = 2x$ vemos que,



$f'(x) = 2x$

$\therefore$

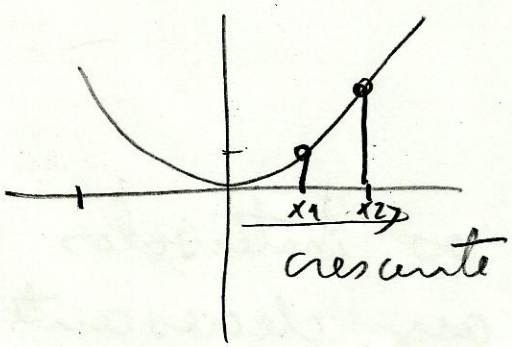
$f'(x) = 2x > 0$ para $x > 0$

$\therefore$ $f(x)$ é crescente para $x > 0$

$f'(x) = 2x < 0$ para $x < 0$

$\therefore$ $f(x)$ é decrescente para $x < 0$

o que está em acordo com o que já sabemos ser o gráfico de $f(x) = x^2$:



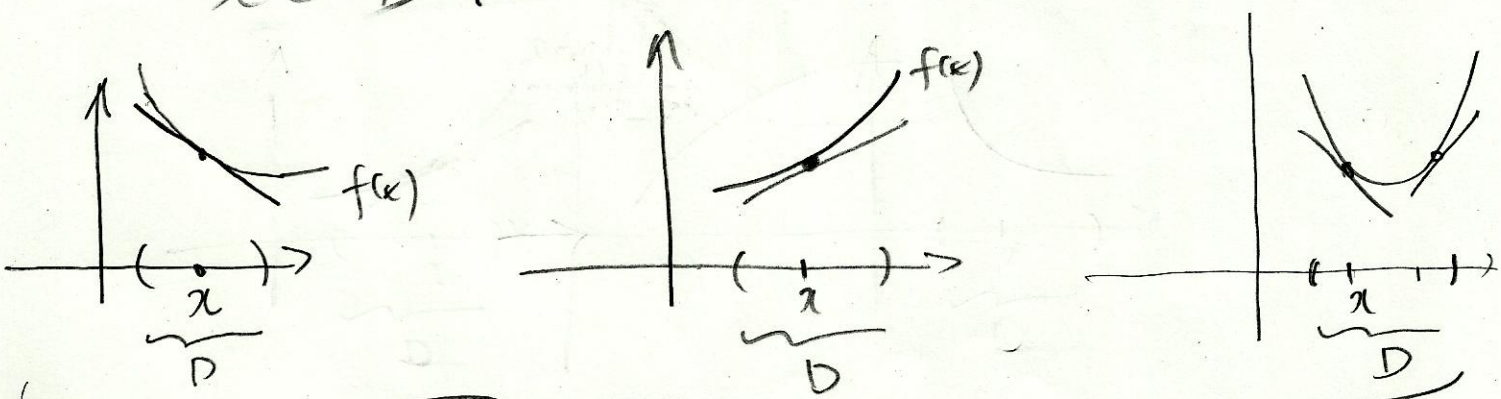
Concavidade do gráfico de uma função

Def: Concavidade do gráfico de uma função

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

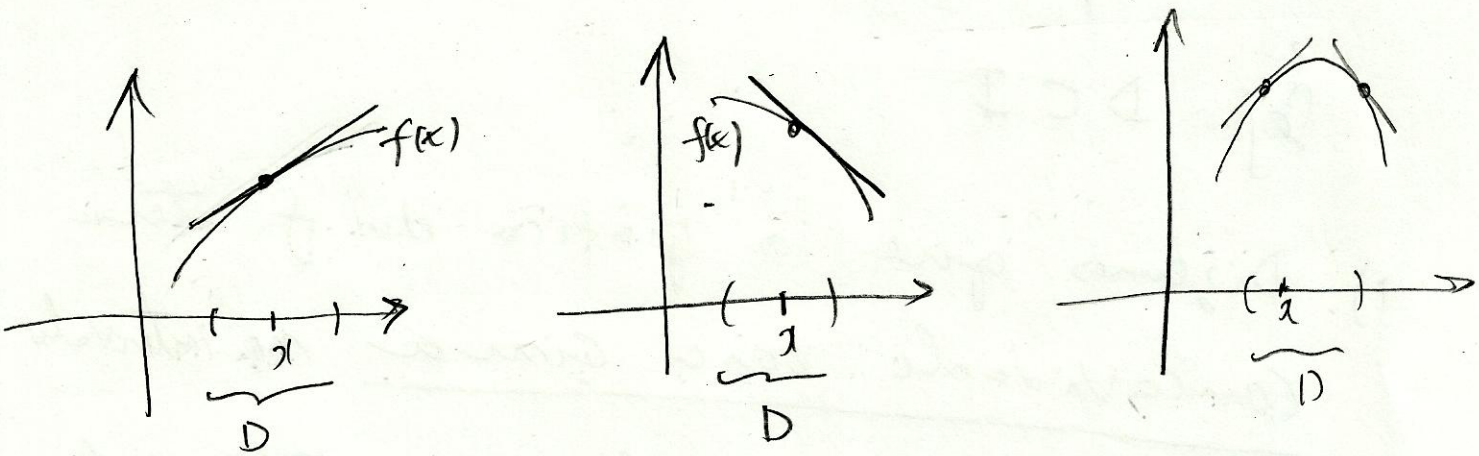
Seja $D \subset I$

1) Dizemos que o gráfico da f tem concavidade para cima no intervalo D se a reta tangente ao gráfico da função f se situa "abaixo" do gráfico da f em cada ponto $x \in D$.



Três casos ilustrando funções cujos gráficos tem concavidade para cima em um intervalo D.

ii) Dizemos que o gráfico da f tem <u>concavidade para baixo</u> no intervalo D se a reta tangente ao gráfico da função f se situa "acima" do gráfico da f em cada ponto $x \in D$.



Três casos ilustrando funções cujos gráficos tem concavidade para <u>baixo</u> em um intervalo D.

Res: Critério para se determinar os intervalos onde o gráfico da f tem concavidade para cima ou para baixo

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja $D \subset I$

i) Se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in D$ então o gráfico da função f tem concavidade para cima em D

ii) Se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in D$ então o gráfico da função f tem concavidade para baixo em D.

Obs.: Pontos de inflexão

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seja $x_0 \in I$ (ponto interior do intervalo I).

Dizemos que x_0 é <u>ponto de inflexão</u> de f se a <u>concavidade</u> do gráfico da função f <u>muda de sinal</u> para pontos próximos <u>de x_0</u>.

Isto é,

x_0 é ponto de inflexão da função f se $\exists \delta > 0$ tal que se tem

(*) $\begin{cases} f''(x) > 0 \ , \ \forall x, \ x_0 - \delta < x < x_0 \\ f''(x) < 0 \ , \ \forall x, \ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$

ou

(**) $\begin{cases} f''(x) < 0 \ , \ \forall x, \ x_0 - \delta < x < x_0 \\ f''(x) > 0 \ , \ \forall x, \ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$

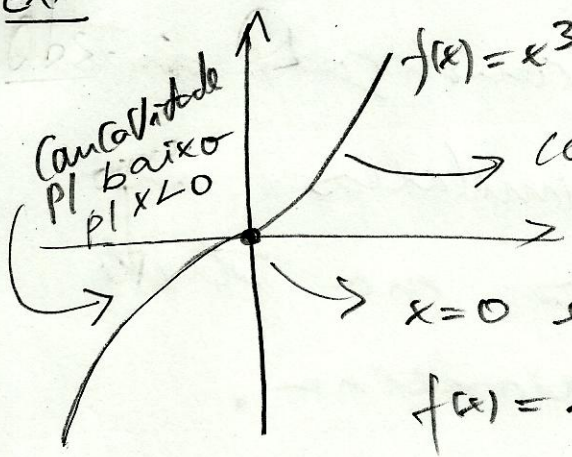
Obs.: Note que as condições anteriores (*) e (**) são similares as condições usadas no teste da derivada primeira.

Obs.: Na prática para a obtenção dos pontos de inflexão da função devemos analisar o sinal de $f''(x)$ e verificar os pontos x_0 onde a derivada segunda muda de sinal.

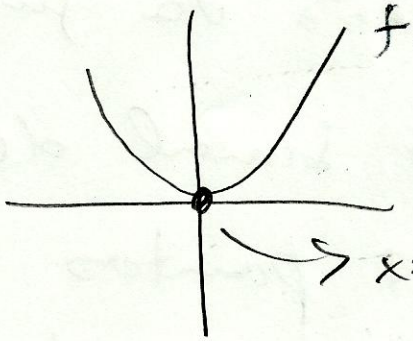
Obs.: Os candidatos a pontos de inflexão são aqueles onde se tem

$f''(x) = 0$ ou $f''(x) \nexists$.

Ex.



$x=0$ é pto. de inflexão de $f(x)=x^3$ pois próximo a $x=0$ vemos que a concavidade muda de sinal



$x=0$ <u>Não</u> é pto. de inflexão de $f(x)=x^2$ pois a concavidade do gráfico de $f(x)=x^2$ não muda de sinal para pontos próximos de $x=0$

Aplicação: Construção de gráficos

Ex. Faça um esboço do gráfico de

$$f(x) = 1 + 3x - x^3$$

Solução

Ao procurar esboçar o gráfico de uma função é conveniente analisarmos os seguintes aspectos:

- Domínio da função
- Possíveis pontos onde f não é contínua (neles pontos o gráfico da f será descontínua, i.e. terá "saltos")
- → Interseções do gráfico da f com os eixos x e y.
- → Comportamento da f quando $x \to \pm\infty$
- → Extremos locais da f
- → Intervalos onde f é crescente ou decrescente
- → Intervalos onde f tem concavidade para cima ou para baixo

e por fim:

→ pontos de inflexão da f

Assim, no caso de $f(x) = 1 + 3x - x^3$ temos:

→ Domínio da f: $Dom\, f = \mathbb{R}$

→ f é contínua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (Porque?)
(Logo, o gráfico da f não terá saltos ou descontinuidades)

→ Interseção com os eixos

eixo y: $f(x) = 1 + 3x - x^3$

$\therefore f(0) = 1$ → corta o eixo y em $y = 1$.

eixo x: $f(x) = 1 + 3x - x^3$

$\therefore f(x) = 0$

$\therefore 1 + 3x - x^3 = 0$

$x = ?$

complicada de achar, assim não se considera.

→ Comportamento da f quando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+3x-x^3)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0} - 1\right)$$

$$= -\infty \;//$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1+3x-x^3)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x^3}{-\infty}}\left(\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0} - 1\right)$$

$$= +\infty \;//$$

→ Extremos locais da f

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$\to f'(x) = 0 \implies 3 - 3x^2 = 0$$

$$3(1-x^2) = 0$$

$$\therefore x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$$

$\to \nexists f'(x) \implies$ não se aplica

Usaremos o teste da derivada segunda para analisar se há extremos locais:

Temos: $f''(x) = -6x$

Daí, temos que

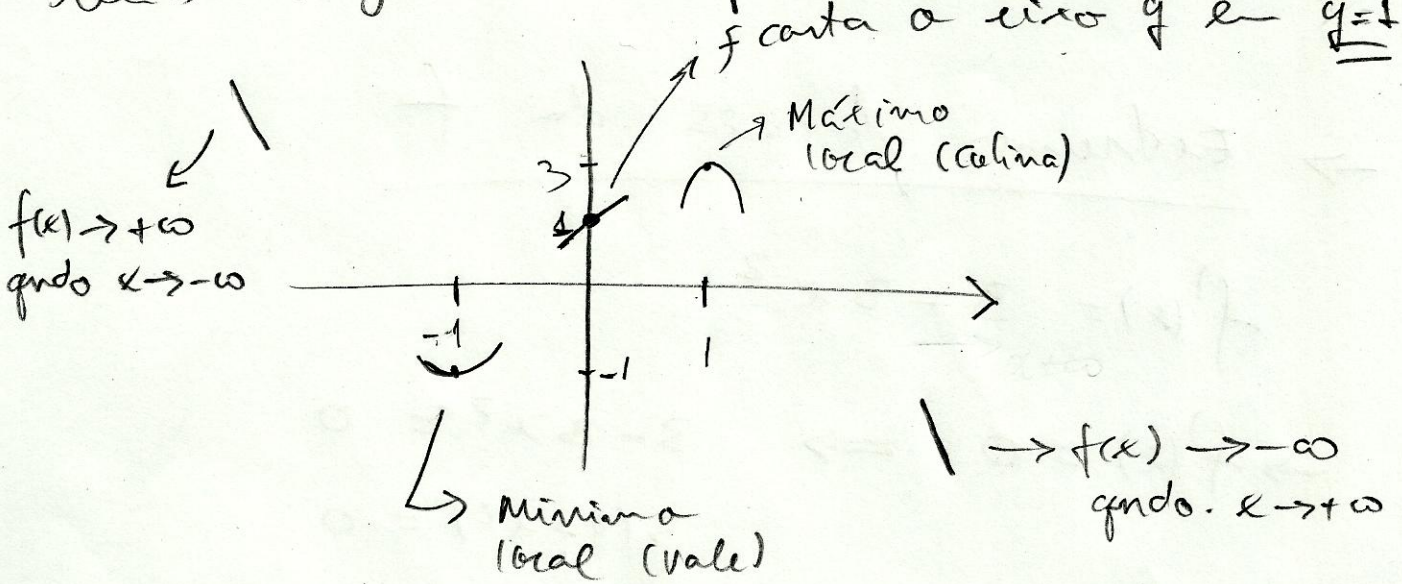
$$f''(-1) = -6(-1) = 6 > 0$$

$\therefore$ $f(-1) = -1$ é <u>mínimo local</u>

$$f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0$$

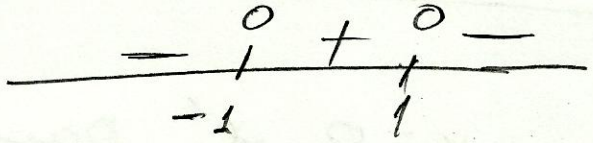
$\therefore$ $f(1) = 3$ é <u>máximo local</u>

Com o que já temos obtido temos algo do tipo



→ f crescente, decrescente

$f'(x) = -3x^2 + 3$



Vemos que:

$f'(x) > 0$ para $-1 < x < 1$

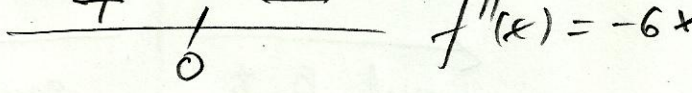
∴ f é crescente se $-1 < x < 1$

$f'(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 1$

∴ f é decrescente se $x < -1$ ou $x > 1$

→ Concavidade

$f''(x) = -6x$



Temos $f''(x) > 0$ se $x < 0$

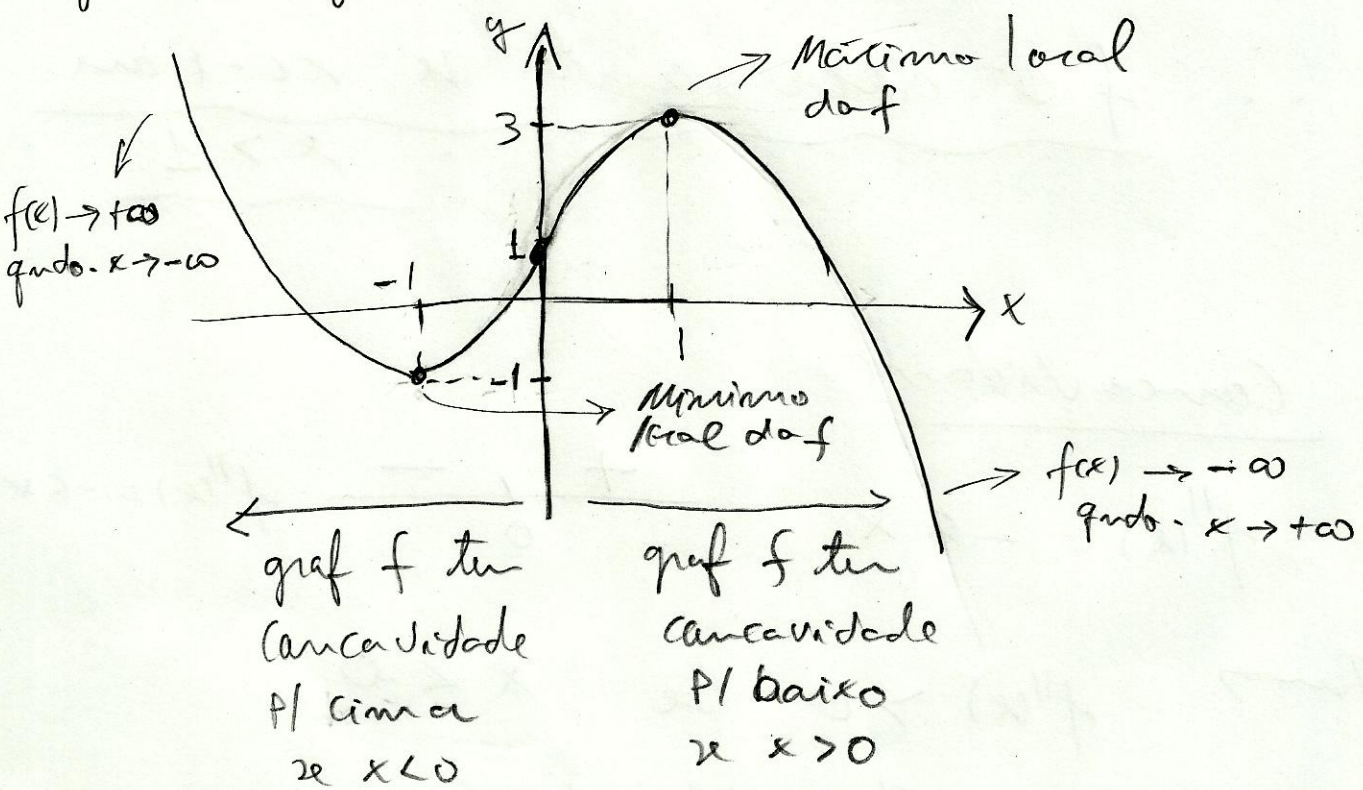
∴ gráfico da f tem concavidade para cima se $x < 0$

$f''(x) < 0$ se $x > 0$

$\therefore$ gráfico de f tem concavidade para baixo se $x > 0$

→ Vemos que $x = 0$ é ponto de inflexão do gráfico de f pois $f''(x)$ muda de sinal próximo de $x = 0$.

Assim, com essas informações temos que o gráfico de f tem a forma:



Exercícios Resolvidos : Extremos locais

1. Use o teste da derivada primeira para determinar os possíveis extremos locais da função

a) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

2. Use o teste da derivada segunda para determinar os possíveis extremos locais da função

a) $f(x) = x^2+3$

b) $f(x) = x^3-6x^2+9x$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$

3. Determine onde a função é crescente, decrescente, e use o teste da derivada primeira para determinar possíveis extremos locais.

a) $f(x) = -2x+5$

b) $f(x) = -x^2+3x-2$

c) $f(x) = x^4+4x$