Cálculo 2 - Prova 1

Nome:

1. Usando o teste que julgar conveniente (teste da comparação I, teste da comparação II, teste da razão ou teste da raiz) determine se as séries a seguir convergem ou divergem: **[1 ponto cada]**

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-n-1}$

2. Calcule a soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ e a partir daí demonstre se a série converge ou diverge. **[2 pontos]**

3. Seja $a_n > 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. **[2 pontos]**

4. Use o critério de Cauchy para provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. **[2 pontos]**

Cálculo 2 - Prova 1

1.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

Temos:

$0 < \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$

$\therefore \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ (*)

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (**)

pois corresponde a uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{3}{2} > 1$.

De (*) e (**) e do teste de comparação I

(Se $0 \le a_n \le b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge)

tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ converge.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

Seja $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}$

$= 1 \neq 0$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (*)

pois corresponde a uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ c/ $p > 1$.

Do teste da comparação II:

$\begin{cases} \text{se } a_n > 0,\ b_n > 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0 \\ \text{então: } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge (diverge)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge (diverge)} \end{cases}$

$\therefore \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \text{ converge} \right\|$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{n}}}{e}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{e} \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}\Big)^3$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$$

Usando o teste da raiz:

se $a_n > 0$ e $\lim \sqrt[n]{a_n} = r$, então se $r < 1$ a série converge.

Logo, temos que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ converge.

iv) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3-n-1}$$

Temos

$$0 < \frac{n}{n^3-n-1} < \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 2$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Do teste de comparação II temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3-n-1} \quad \underline{\text{converge}}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$$

$$s_1 = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1$$

$$s_2 = \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$$

$$s_3 = \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \cancel{\sqrt{3}} + \sqrt{4} - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{4} - \sqrt{2} + 1$$

$$\vdots$$

$$\| s_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1 \| \quad (*)$$

0.4

Então

$$s_{n+1} = \sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} + s_n$$

$$= \sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \cancel{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n+2} - \cancel{\sqrt{n+1}} - \sqrt{2} + 1$$

$$= \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} - \sqrt{2} + 1$$

o que mostra a validade da expressão (*).

Emfeō reja

$$s_n + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (s_n + \sqrt{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}\right)}{\left(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3-(n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (s_n + \sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\therefore \left\| \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \sqrt{2} \right\|$$

$$\therefore \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = 1 - \sqrt{2}}$$

3. $a_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$$

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$$

Logo, do critério da comparação II tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Critério de Cauchy para convergência de séries:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sse $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$m > n > n_0 \Rightarrow |a_n + \dots + a_m| < \varepsilon$

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Do princípio Arquimediano

$\exists (n_0 - 1) \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 - 1$.

Sejam $m > n > n_0$

$\therefore \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| <$

$$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)n} + \dots + \frac{1}{m(m-1)} =$$

$$= \frac{1}{n-1} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{(n-1)m} < \frac{m}{m(n-1)} = \frac{1}{n-1} <$$

$< \dfrac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon$

$\therefore$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m \geq n > n_0 \geq 1 \Rightarrow$

$\rightarrow |a_n + \dots + a_m| < \varepsilon$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.