Cálculo 2 - Lista 1

Séries

Encontrar o termo geral das séries

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{8} + \cdots$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \cdots$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \cdots$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \cdots$

Nos exercícios (11)-(13) calcule a quarta soma parcial de cada série

11. $\sum_{n=1}^{\infty} 1$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Nos exercícios (14)-(28) use o critério $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ para verificar que séries são necessariamente divergentes.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{7}\right)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-2)}$
20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$
21. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{2}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

Nos exercícios (29)-(46), encontre uma fórmula para a soma parcial das séries. Para cada série, determine se a soma parcial tem um limite. Se admitir, encontre a soma da série.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} 1$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$
31. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$
32. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 - (n+1)^3\right)$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
[Sugestão: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (|q| < 1)$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha \quad (|q| < 1)$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{4}{7}\right)^n$

43. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(0.3)^n$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}$

47. Seja a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Mostre que a $n-$ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ é $a_1 - a_{n+1}$. Conclua que esta série converge se e somente se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe e, neste caso, a soma é $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

48. Um dos paradoxos de Zeno consiste em provar que embora Aquiles seja 10 vezes mais rápido que uma tartaruga ele não pode alcançar uma tartaruga que esteja 100 metros a sua frente. O argumento é o seguinte. Quando Aquiles andar 100 metros a tartaruga terá andado 10 metros. Quando Aquiles andar mais 10 metros a tartaruga terá andado 1 metro. Quando Aquiles andar mais 1 metro a tartaruga terá andado 1/10 metro e assim por diante. Dessa forma, Aquiles sempre estará atrás da tartaruga nunca chegando a alcançá-la. Resolva o paradoxo da seguinte maneira. Some as duas séries e mostre que Aquiles de fato alcança a tartaruga. Determine também quantos metros Aquiles tem que percorrer até alcançar a tartaruga.

49. O matemático suiço Euler usou idéias expressas no teorema da série geométrica para deduzir que se $r > 0$ então

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{1-1/r} = \frac{-r}{1-r}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \ .$$

Então, ele concluiu que

$$\begin{aligned} &\left(.... + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1\right) + \\ &+(r + r^2 + ...) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \\ &= \frac{-r}{1-r} + \frac{r}{1-r} = 0 \ . \end{aligned}$$

Uma vez que todos os termos na série são positivos, tal conclusão é um absurdo. Porque o argumento é inválido?

50. Encontre o erro no seguinte argumento. Seja

$$a = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$$

Então

$$\begin{aligned} 2a &= 2 + 4 + 8 + 16 + ... \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + ...) - 1 \\ &= a - 1 \end{aligned}$$

Assim, $a = -1$.

51. Dois trens viajam em linha reta e em direções opostas a 15 km/h. Quando a distância entre os trens é de 1 km, uma abelha começa a viajar de um trem ao outro com velocidade de 30 km/h. Expresse a distância percorrida pela abelha até os trens se encontrarem como uma série infinita e encontre a soma da série.
[Um problema similar foi posto ao grande matemático John von Neumann que o resolveu quase instantaneamente mentalmente. Quando perguntado como ele havia somado a série tão

rapidamente ele respondeu dizendo que não havia utilizado séries. Como se pode resolver este problema sem usar séries? Uma sugestão é considerar o tempo no qual a abelha viaja.]

Respostas:

1. $a_n = \frac{1}{2n-1}$
2. $a_n = \frac{1}{2^n}$
3. $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$
4. $a_n = \frac{1}{n^2}$
5. $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$
6. $a_n = \frac{2n}{3n+2}$
7. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
8. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}$
9. $a_n = (-1)^{n+1}$ ou $a_n = (-1)n - 1$
10. $$a_n = \begin{cases} n \text{ se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$$
11. $s_4 = 4$
12. $s_4 = \frac{40}{27}$
13. $s_4 = \frac{13}{60}$
14. não se pode afirmar
15. diverge
16. diverge
17. diverge
18. diverge
19. diverge
20. diverge
21. não se pode afirmar
22. diverge
23. diverge
24. diverge
25. diverge
26. diverge
27. não se pode afirmar
28. diverge
29. diverge
30. $s_k = \frac{1}{3} \frac{4^k - 1}{4^k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$
31. $$s_k = \begin{cases} 1 \text{ se } k \text{ ímpar} \\ 0 \text{ se } k \text{ par} \end{cases}$$ $\lim_{k\to\infty} s_k \nexists$
32. $s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$
33. $s_k = 1 - \frac{1}{(k+1)^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1$
34. $s_k = 1 - (k+1)^3$
    $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 - (n+1)^3 = +\infty$
35. $s_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$
36. $s_k = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}$
37. $s_k = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{3^k - 1}{2 \cdot 3^k}$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$
38. $s_k = 3 - \frac{3}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}}$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$
39. $s_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)}$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$
40. ?
41. ?
42. $s_k = \frac{20}{3}\left(1 - \left(\frac{4}{7}\right)^k\right)$
    $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{4}{7}\right)^n = \frac{20}{3}$
43. $s_k = \frac{1}{1.3}(1 - (-1)^k (0.3)^k)$
    $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (0.3)^n = \frac{1}{1.3}$
44. $s_k = 5\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$
    $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{5}{2}$
45. $s_k = \frac{5 \cdot 3^4}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^k\right)$
    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n-1}} = \frac{405}{2}$
46. $s_k = \frac{3}{4} - \frac{(-1)^{k+2}}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$
    diverge
48. $\frac{1000}{9}$ m
51. 1 km