

Cálculo 2 - Lista 10

Integral indefinida (Antiderivada) e propriedades da integral

Calcule a integral indefinida dada nos exercícios 1-12

1. $\int (2x - 7) dx$

2. $\int (2x^2 - 7x^3 + 4x^4) dx$

3. $\int (2x^{1/3} - 3x^{3/4} + x^{2/5}) dx$

4. $\int (x^{3/2} + 4x^{1/2} - \pi) dx$

5. $\int (t^5 - \frac{1}{t^4}) dt$

6. $\int (\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}) dy$

7. $\int (2 \cos x - 5x) dx$

8. $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta) d\theta$

9. $\int (3 \csc^2 x - x) dx$

10. $\int (\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2y) dy$

11. $\int (2t + 1)^2 dt$

12. $\int (t + \frac{1}{t})^2 dt$

Nos exercícios 13-22 calcule as integrais definidas

13. $\int_{-1}^2 (3x - 4) dx$

14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (-7 \sin x + 3 \cos x) dx$

15. $\int_{-\pi/4}^{-\pi/2} (3x - \frac{1}{x^2} + \sin x) dx$

16. $\int_{\pi/3}^{\pi/4} (3 \sec^2 \theta + 4 \csc^2 \theta) d\theta$

17. $\int_1^{1/3} (3t + 2)^3 dt$

18. $\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi \sin x - 2x + \frac{5}{x^2} + 2\pi) dx$

19. $\int_{-1}^1 (2x + 5)(2x - 5) dx$

20. $\int_4^7 |x - 5| dx$

21. $\int_{-3}^4 |-5x + 2| dx$

22. $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ com

$$f(x) = \begin{cases} \sec^2 x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \\ \csc^2 x, & \pi/4 < x \leq \pi/2 \end{cases}$$

23. Use as desigualdades $0 \leq \sin x \leq x$ com $0 \leq x \leq 1$ e mostre que

(i) $0 \leq \int_0^1 \sin x^2 dx \leq \frac{1}{3}$

(ii) $0 \leq \int_0^{\pi/6} \sin^{3/2} x dx \leq \frac{2}{5}(\frac{\pi}{6})^{5/2}$

24. Use as desigualdades $0 \leq \sin x \leq x$ com $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e mostre que

$$0 \leq \int_0^{1/2} x \sin x dx \leq \frac{1}{24}$$

25. Seja $f(x) = 1 - x$. Mostre que

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| < \int_0^2 |f(x)| dx$$

26. Seja f contínua em $[a, b]$, e $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Mostre que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

27. Use o resultado (26) para determinar uma cota superior para

$$\left| \int_{-\pi/3}^{-\pi/4} \tan x dx \right|$$

28. Mostre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon x \sin x dx = 0$$

[Sugestão: $0 \leq \sin x \leq x, \forall x > 0$]

29. Suponha que $|f'(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. Assuma $f(a) = 0$.

(i) Usando o teorema do valor médio mostre que

$$|f(x)| \leq M(x - a), \forall x \in [a, b]$$

(ii) Usando (i) e a propriedade $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2}(b - a)^2$$

30. Usando a parte (ii) do resultado (29) encontre uma cota superior para os valores absolutos das integrais a seguir

(i) $\int_{1/2}^1 (\frac{1}{x} - 1) dx$

(ii) $\int_0^{\pi/6} \sin^{3/2} x dx$

[Sugestão: Mostre que $\frac{d}{dx} \sin^{3/2} x \leq \frac{3}{4}\sqrt{2}$ para todo $0 \leq x \leq \pi/6$]

31. Suponha que $b < a$ e que f e g são funções contínuas com $g(x) \leq f(x)$ para todo $b \leq x \leq a$. Usando a propriedade geral da comparação:

Se f e g são contínuas em $[a, b]$ com $g(x) \leq f(x)$ para todo $a \leq x \leq b$ então

$$\int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x) dx,$$

mostre que

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

32. Mostre que se f_1, f_2, \dots, f_n tem antiderivadas em um intervalo I então

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

33. Sejam f e g contínuas em $[a, b]$. Mostre que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

[Sugestão: seja $p(r) = \int_a^b [f(x) + rg(x)]^2 dx, \forall r \in R$. Mostre que $p(r)$ tem a forma $Ar^2 + Br + C$ onde A, B, C são constantes. Mostre então que $p(r) \geq 0, \forall r$ e deduza que $B^2 - 4AC \leq 0$, que estabelece a desigualdade procurada.]

Respostas

1. $x^2 - 7x + C$

2. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^5 + C$

3. $\frac{3}{2}x^{4/3} - \frac{12}{7}x^{7/4} + \frac{5}{7}x^{7/5} + C$

4. $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - \pi x + C$

5. $\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{3t^3} + C$

6. $\frac{2}{3}y^{3/2} + 2y^{1/2} + C$

7. $2 \sin x - \frac{5}{2}x^2 + C$

8. $\frac{\theta^3}{3} + \tan \theta + C$

9. $-3 \cot x - \frac{x^2}{2} + C$

10. $-\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{y} + y^2$

11. $\frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + t + C$

12. $\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C$

13. $-\frac{15}{2}$
14. $3 - 5\sqrt{2}$
15. $\frac{9\pi^2}{32} + \frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
16. $-1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}$
17. $-\frac{136}{3}$
18. $\pi + \frac{\pi^2}{4} + \frac{5}{\pi}$
19. $-\frac{142}{3}$
20. $\frac{5}{2}$
21. $\frac{613}{10}$
22. 2
23. (i) $0 \leq \int_0^1 \sin^2 x \, dx \leq \frac{1}{3}$
(ii) $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{3/2} x \, dx \leq \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{5/2}$
24. $0 \leq \int_0^{1/2} x \sin x \, dx \leq \frac{1}{24}$
27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$
30. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{\sqrt{2}\pi^6}{96}$