Cálculo 2 - Lista 21

Integrais impróprias I (Intervalo de integração é ilimitado)

Nos exercícios 1 a 18, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
2. $\int_{-\infty}^{1} e^{x} dx$
3. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2} dx$
4. $\int_1^{\infty} 2^{-x} dx$
5. $\int_0^{\infty} x2^{-x} dx$
6. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cosh x dx$
8. $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x} dx$
9. $\int_5^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$
10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3xdx}{(3x^2+2)^3}$
11. $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3dx}{x^2+9}$
12. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
13. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$
15. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^2}$
17. $\int_1^{\infty} \ln x dx$
18. $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$
19. Calcule se existir:
    (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$
    (b) $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \sin x dx$
20. Prove que se $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ for convergente, então $\int_{-b}^{\infty} f(-x)dx$ também será convergente e terá o mesmo valor.
21. Mostre que a integral imprópria
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-2} dx$$
é convergente e a integral imprópria
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^{-1} dx$$
é divergente.
22. Prove que a integral imprópria
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$$
será convergente se e somente se $n > 1$.
23. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a área da região limitada pela curva cuja equação é
$$y = \frac{1}{(e^x + e^{-x})}$$
e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.
24. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é
$$y = \frac{1}{(x^2-1)}$$
pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Caso seja possível, determine-o.
25. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região à direita da reta $x = 1$ e limitada pela curva cuja equação é
$$y = \frac{1}{x^{3/2}}$$
e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.
26. Determine se é possível atribuir um número finito para representar o volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo eixo x, pelo eixo y e pela curva cuja equação é $y = e^{-2x}$. Caso seja possível, determine-o.

27. (a) Suponha que f e g são contínuas em $[a, \infty)$. Mostre que se $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ convergem, então $\int_a^\infty (f(x) + g(x))dx$ converge.
(b) Mostre que se $\int_a^\infty f(x)dx$ converge então $\int_a^\infty cf(x)dx$ também converge para todo c.

28. Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$ e assuma que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $x \geq a$. Mostre que se $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$, então $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$ e consequentemente $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

29. Usando o resultado (28) mostre que cada uma das integrais a seguir divergem.
(a)
$$\int_1^\infty \frac{1}{1 + x^{1/2}}\, dx$$
(b)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2 + \sin x}}\, dx$$
(c)
$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$$
(d)
$$\int_2^\infty \frac{1}{(1 + x)\ln x}\, dx$$

30. Seja
$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$
$n \in N$. Usando integração por partes mostre que $I_n = nI_{n-1}$ para $n \geq 1$. Daí, mostre que $I_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$

Respostas

1. 1
2. e
3. $-\frac{1}{2\ln 5}$
4. $\frac{1}{2\ln 2}$
5. $\frac{1}{(\ln 2)^2}$
6. ∞ (divergente)
7. diverge
8. 2
9. $-\infty$ (diverge)
10. 0
11. $\frac{\pi}{3}$
12. ∞ (diverge)
13. 2
14. 0
15. 1
16. $\frac{\pi}{4}$
17. ∞ (diverge)
18. $\frac{1}{2}$
19. (a) $\nexists$
(b) 0