Cálculo 2 - Lista 7

Todos os exercícios devem ser resolvidos usando a definição de integral definida em termos de somas inferiores e superiores: $L_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq U_f(\mathcal{P})$

Nos exercícios 1-3 determine uma aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ calculando $L_f(\mathcal{P})$ e $U_f(\mathcal{P})$

1. $\int_{-1}^{3} 2x\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
2. $\int_{-1}^{3} |x|\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$
3. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 3\sin x\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\}$

Nos exercícios 4-6 determine uma aproximação para a integral usando uma soma de Riemann relativo a partição indicada e usando por t_k:
(i) o extremo esquerdo de cada subintervalo
(ii) o extremo direito de cada subintervalo
(iii) o ponto médio de cada subintervalo

4. $\int_1^3 (x^2 - x)\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$
5. $\int_0^2 \sin \pi x\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$
6. $\int_1^5 \frac{1}{x}\, dx,\ \ \mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
7. Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$.
   (i) Mostre que
   $$L_f(\mathcal{P}) \leq L_g(\mathcal{P})$$
   $$U_f(\mathcal{P}) \leq U_g(\mathcal{P})$$
   para toda partição de $[a, b]$.
   (ii) Mostre que $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\, dx$ dando as razões para as passagens marcadas por (1), (2) e (3) na prova por contradição a seguir:
   Suponha que $\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b g(x)\, dx$. Então para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ temos
   $$L_g(\mathcal{P}) \overset{(1)}{\leq} \int_a^b g(x)\, dx < \int_a^b f(x)\, dx \overset{(2)}{\leq} U_f(\mathcal{P}) \overset{(3)}{\leq} U_g(\mathcal{P})\ .$$
   Assim, $\int_a^b f(x)\, dx$ e $\int_a^b g(x)\, dx$ são dois números distintos situados entre $L_g(\mathcal{P})$ e $U_g(\mathcal{P})$ o que contradiz a unicidade deste número, logo devemos ter
   $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$
8. Seja $0 \leq a \leq b$. Mostre que
   $$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$
   [Sugestão: Se $x_{k-1} < x_k$ então $x_{k-1}^2 < \frac{1}{3}(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) < x_k^2$]
   Que resultado se obtem se $b < a$?

Respostas

1. $4 \leq \int_{-1}^{3} 2x\ dx \leq 12$
2. $4 \leq \int_{-1}^{3} |x|\ dx \leq 6$
3. $\frac{-3\pi\sqrt{2}}{8} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3x \sin x\ dx \leq \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$
4. (i) 2, (ii) 8, (iii) 9/2
5. (i) 1/2, (ii) 1/2, (iii) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
6. (i) $\frac{25}{12}$, (ii) $\frac{77}{60}$, (iii) $\frac{496}{315}$