

## Cálculo 2 - Lista 8

### Propriedades da integral definida

Usando a propriedade da adição:

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  em qualquer intervalo contendo  $a, b, c$  e para  $f$  contínua, reduza as integrais nos exercícios 1-4 a uma única integral.

1.  $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$
2.  $\int_3^4 f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx$
3.  $\int_1^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$
4.  $\int_{-2}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^{-6} f(x) dx$

Nos exercícios 5-8 use a propriedade da adição para encontrar os valores de  $a$  e  $b$  que tornam as equações verdadeiras

5.  $\int_0^2 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
6.  $\int_{1/2}^{-1/2} f(x) dx + \int_{-1}^{1/2} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
7.  $\int_a^b f(t) dt - \int_5^3 f(t) dt = \int_3^1 f(t) dt$
8.  $\int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt - \int_a^b f(t) dt = \int_{3\pi}^{2\pi} f(t) dt$

Nos exercícios 9-12 encontre os valores máximo e mínimo da função no intervalo  $[a, b]$  especificado. Então, usando a propriedade da comparação:

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$  com  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$  encontre um cota inferior e uma cota superior para o valor da área da região entre o gráfico da função e a parte do eixo-x compreendida entre  $x = a$  e  $x = b$ .

9.  $f(x) = 13, [-3, 0]$
10.  $f(x) = x^2, [-1, 3]$
11.  $f(x) = \frac{1}{x}, [2, 3]$
12.  $f(x) = \cos x, [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$
13. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Encontre a área da região entre o gráfico de  $f$  e a parte do eixo-x compreendida em  $[-1, 1]$

14. Seja  $f(x) = c, \forall a \leq x \leq b$ . Mostre que o valor médio de  $f$  em  $[a, b]$  é  $c$ .  
[Lembre-se que o valor médio de  $f$  em  $[a, b]$  é dado por  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ ]

15. Mostre que  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx > 0$ .

16. Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Mostre que  $\int_a^b f(x) \, dx > 0$  se  $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ .

[Sugestão: Sendo  $f$  contínua ela assume um valor mínimo  $m$  em  $[a, b]$ . Obviamente tem-se  $m > 0$ .]

### Respostas

1.  $\int_0^2 f(x) \, dx$

2.  $\int_3^3 f(x) \, dx = 0$

3.  $\int_1^2 f(x) \, dx$

4.  $\int_{-2}^{-6} f(x) \, dx$

5.  $a = 3, b = 2$

6.  $a = -1, b = -\frac{1}{2}$

7.  $a = 5, b = 1$

8.  $a = \pi, b = 3\pi$

9.  $39 \leq \int_{-3}^0 13 \, dx \leq 39$

10.  $0 \leq \int_{-1}^3 x^2 \, dx \leq 36$

11.  $\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} \, dx \leq \frac{1}{2}$

12.  $\frac{\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{24}$

13.  $\frac{5}{6}$