Série de Potências

• **Def.**: <u>Série de Potências</u>

Seja $x \in \mathbb{R}$.
Uma série de potências é uma série do tipo

$$(*) \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R} \text{ fixos}$$

→ Assumindo que $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
(note que 0^0 é indeterminado)
pode-se escrever $(*)$ como:

$$(**) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

• <u>Obs.</u> Se $c_n = 0, \forall n > n_0$ então a série de potências é dita um polinômio de grau n_0.

• Ex. $2 - 3x + 4x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\therefore \begin{cases} c_0 = 2 \; , \; c_1 = -3 \; , \; c_2 = 4 \\ c_n = 0 \; , \; n \geq 3 \end{cases}$$

→ Convergência ou divergência de uma série de potências

Dada a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

podemos determinar para que valores de x a série converge e para que valores a série diverge.

→ Se $x=0$ temos $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

Se $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{c_n 0^n}^{\,0}$

$$= c_0$$

→ Toda série de potências determina uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ cujo domínio é o conjunto de valores de x para o qual a série converge.

Note que: $f(0) = c_0$.

Ex. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \cdots$$

converge apenas se $x=0$.

De fato,

Se $x \neq 0$, tem-se do teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\,x\right| = +\infty > 1$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ diverge se $x \neq 0$

Se $x=0$ tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1$$

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \text{ converge apenas se } x=0}$

Ex. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge para todo } x \in \mathbb{R}.$$

<u>De fato</u>,

se $x \neq 0$ temos do teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(n+1)} = 0 < 1$$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge se $x \neq 0$

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ converge } \forall x \in \mathbb{R}}$

Se $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = c_0 = \frac{1}{0!} = 1$$

Ex. Analisar a convergência de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Solução

Se $|x| < 1$ temos,

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é série geométrica convergente

$$\therefore \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad |x| < 1}$$

Se $x \geq 1$ temos

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é série geométrica divergente.

Obs. :

i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < |z|$

ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ diverge então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge para $|x| > |z|$

Demonstração

i) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergente. (1)

Seja $|x| < |z|$ (2)

Considere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \left(\frac{x}{z}\right)^n$ (3)

De (1) :

$$\lim_{n \to \infty} c_n z^n = 0$$

$\therefore$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow |c_n z^n| \leq 1$

$\therefore$ $|c_n x^n| = |c_n z^n| \left|\frac{x}{z}\right|^n \leq \left|\frac{x}{z}\right|^n, \ n \geq n_0$

Sendo $|x| < |z|$ temos

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{s}\right|^n$ série geométrica convergente

e do teste da comparação I:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ converge absolutamente se } |x| < |s|}$

ii) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$ divergente

Suponha $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergente para $|s| < |x|$

então do item (i) teríamos que

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$ seria convergente para $|s| < |x|$

o que contraria a hipótese.

Logo $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge para } |s| < |x|}$

Obs.: Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ já vimos que

→ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode convergir apenas para $x = 0$ (Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$)

→ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode convergir para todo $x \in \mathbb{R}$ (Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

Assim, em qualquer outro caso teremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergindo para um certo $x \in \mathbb{R}$ e divergindo para outro valor $x \in \mathbb{R}$.

O resultado anterior permite então concluir que $\exists\, R > 0$ tq. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergirá para valores $|x| < R$ e divergirá para valores $|x| > R$.

O que nos leva ao seguinte resultado:

• Res. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ série de potências.

Então tem-se satisfeito apenas uma das situações:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $x=0$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$

iii) $\exists R > 0$ t.q. $\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge para } |x| < R \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge para } |x| > R \end{cases}$

• Def. Raio de convergência de uma série de potências

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ série de potências.

O raio de convergência da série de potências é um número $R \geq 0$ t.q.

$$\begin{cases} R = 0 & \text{se } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge apenas para } x=0 \\ R = +\infty & \text{se } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge } \forall x \in \mathbb{R} \\ R & \text{se } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge para } |x| < R. \end{cases}$$

Def: Intervalo de Convergência

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ série de potências

O intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ é o conjunto dos valores de x para o qual a série de potências converge

i.e., se R é o raio de convergência da série tem-se o intervalo de convergência de um dos seguintes tipo:

$[0, 0]$ $(R=0)$, $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$,

$(-\infty, +\infty)$ $(R=+\infty)$

Critério geral para se determinar o intervalo de convergência de uma série de potências

→ Aplicar o teste da razão ou raiz para se determinar o raio de convergência R

→ testar a convergência da série para $x = \pm R$.

Ex. Determinemos o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

Solução

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{n\,x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|x \, \frac{n+1}{n}\right| = |x|$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n & \text{converge se } |x| < 1 \\ & \text{diverge se } |x| > 1 \end{array} \right.$$

Se $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ diverge

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \text{ tem intervalo convergência } I = (-1,1)}$

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \rightarrow R=0$

$\therefore$ Intervalo convergência $[0,0]$

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \rightarrow R=1$

$\therefore$ Intervalo convergência $(-1,1)$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|x\,\frac{n}{n+1}\right| = |x|$$

Interpretação: $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ converge absolutamente se } \underline{|x|<1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ diverge se } \underline{|x|>1} \end{cases}$

Se $\underline{x=1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Se $\underline{x=-1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (já visto)

$\therefore$ Intervalo convergência: $[-1,1)$

Ex.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-x)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -x \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ converge se $|x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$ diverge se $|x| > 1$

Se $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Se $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n}$ diverge

$\therefore$ Intervalo de convergência : $(-1, 1]$.

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Já vimos:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n x^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -x^2 \frac{2n+1}{2n+3} \right|$$

$$= x^2$$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge se $|x| < 1$

diverge se $|x| > 1$

Se $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$a_n = \frac{1}{2n+1}$

$$\begin{cases} 0 < a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} < a_n \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge se $x = 1$

Se $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \overbrace{(-1)^{2n+1}}^{1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

que também converge pelo teste de série alternada

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge se $x=-1$

$\therefore$ Intervalo convergência : $\underline{[-1,1]}$

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ já visto que converge para $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ Intervalo convergência : $\underline{(-\infty,+\infty)}$

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ (Série geométrica)

Converge se $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$

$\therefore |x| < 2$

$\therefore (-2,2)$ Intervalo Convergência

Ex. Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} x^n$$

Solução

Tentemos achar algum valor de x para o qual a série convirja.

→ Se $x = -1$ verifica-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} (-1)^n$$ converge, pois

$$a_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}} < a_n = \frac{1}{n^{1/2}} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0 \end{cases}$$

e do teste da série alternada vemos que a série converge

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} x^n$ converge para $|x| < |-1| = 1$ (*).

É $R = 1$?

Note:

Se $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

que diverge pois é uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{1}{2} \leq 1$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} x^n \text{ diverge se } |x| > |1| = 1 \quad (**)$$

De (*) e (**):

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} x^n \text{ tem intervalo de convergência } [-1, 1)}$$

Obs. Usando o teste da razão tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|x \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = |x|$$

$\therefore$ Converge absolutamente $|x| < 1$

diverge $|x| > 1$

Diferenciação de Séries de Potências

Res.

Seja $\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{série de potências} \\ R : \text{raio de convergência } (R>0)\end{array}\right.$

→ Então a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$ tem o mesmo

raio de convergência e

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(c x^n),$$

$$|x|<R$$

Obs. : O que este resultado nos dá é que dada uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x|<R$$

associada a uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$,

então existe a derivada $f'(x)$ sendo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad |x|<R$$

Ex: Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Solução

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \longrightarrow (-\infty,+\infty) \; ; \text{ Inf. Conv.}$$

Então

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} \quad \text{em } (-\infty,+\infty)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

lembre-se que e^x era tal que

$$(e^x)' = e^x$$

Logo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + cte$$

Mas $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} + cte$

e já vimos que $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, logo cte $= 0$

e obtém-se:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Obs.: i) O resultado anterior diz apenas que se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência R, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ também tem raio de convergência R.

No entanto, os intervalos de convergência podem ser distintos.

Ex.

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \longrightarrow \text{int. conv. } [-1,1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \longrightarrow \text{int. conv. } (-1,1) \end{cases}$$

ii) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x| < R$.

Então $$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad |x| < R$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}, \quad |x| < R$$

etc.

Res.:

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x| < R$.

Então a série de potências admite derivadas de quaisquer ordem para $|x| < R$

Res.:

Seja
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R.$$

Então
$$\begin{cases} \text{existe } f^{(n)}(x), & n \geq 0 \\ f^{(n)}(0) = n!\, c_n, & n \geq 0 \\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, & |x| < R \end{cases}$$

Demonstração

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R$

Já vimos (demonstração) que existe $f^{(n)}(x)$, $\forall n \geq 0$.

$\left(f^{(0)}(x) \doteq f(x) \right)$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n(n-1)\ldots(n-(k-1))\, x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} c_n\, n(n-1)\ldots(n-(k-1))\, x^{n-k}$$

$\therefore$

$$f^{(k)}(0) = c_k\, k(k-1)\ldots 1 = c_k\, k!$$

$\therefore \quad c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$$\therefore \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

(Série de Taylor)

<u>Obs.</u>: Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ } séries de potências convergentes em $|x| < R$.

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x| < R$

então $c_n = b_n$, $\forall n \geq 0$.

<u>De fato</u>

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x| < R$ $\quad (*)$

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Então

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Mas de (*) temos também que

$$b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\therefore \quad \underline{c_n = b_n}, \ \forall n \geq 0$$

Obs.:

→ Já vimos que dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x|<R$ ela define uma função

$$\begin{cases} f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \underbrace{|x|<R}_{\text{Domínio de } f} \\ \text{e que} \\ \exists f^{(n)}(x), \quad |x|<R \\ f^{(n)}(0) = n!\,c_n . \end{cases}$$

→ Dada agora uma função $f(x)$, existe uma série de potências que represente $f(x)$ num certo intervalo $I=(a,b) \subset \mathrm{Dom}\, f$?

Representação de uma função por uma série de potências

Seja

$$\begin{cases} f : \text{função} \\ I \subset \text{Dom} f \\ I \text{ intervalo aberto com } 0 \in I \end{cases}$$

f é dita ter uma <u>representação por série de potências em I</u> se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ , \quad \forall x \in I \quad (*)$$

• **Obs.**: Em um resultado anterior vimos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ em I então

$\rightarrow \exists\, f^{(n)}(x)$, $\forall x \in I$ ⊛

$\rightarrow c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; $n \geq 0$

$\rightarrow$ A representação em série de potências de $f(x)$ em I é única.

Assim:

A fim de $f(x)$ ser representada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ em um intervalo I é necessário (de ⊛) que f seja infinitamente diferenciável em I.

(Note: $a \in I$)

• <u>Def.</u> : <u>Série de Taylor de uma função f (em torno de $x=0$)</u>

Seja f : função

$f^{(n)}(0)$ existe, $\forall n \in \mathbb{N}$

A <u>série de Taylor da função f em torno de $x=0$</u> é definida como sendo a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \; |x| < R$$

• **Def.** : Série de Taylor de uma função f (em torno de $x = a$)

Seja f: função

$f^{(n)}(a)$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$

A série de Taylor da função f em torno de a é definida como sendo a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad , \quad |x| < R$$

Obs.:

i) O n-ésimo polinômio de Taylor da função f em torno de a é

$$
\begin{cases}
p_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
\qquad = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\
\qquad + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{cases}
$$

ii) O n-ésimo resto de Taylor é definido como

$$r_n(x) := f(x) - p_n(x)$$

Res.:

Seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n , \quad |x| < R$$

série de Taylor de f.

Tem-se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \text{sss} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

Seja $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n .$$

Seja $$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$
$$= f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{n-ésima soma parcial da série}}$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - p_n(x) \right)$$

$$= 0$$

$(\Longleftarrow)$

Seja $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - p_n(x) \right) = 0$$

$$\therefore f(x) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} p_n(x)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Res. : Teorema de Taylor

Seja $\begin{cases} f(x) \text{ função} \\ f^{(n+1)}(x) \text{ existe } \forall x \in I \\ I \text{ intervalo aberto}, \quad a \in I \end{cases}$

Então, $\exists\, t_x$ com $a < t_x < x$ ou $x < t_x < a$

tal que :

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

(fórmula de Taylor)

$$\boxed{r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

(fórmula do resto de Lagrange)

Demonstração

- Lembrar o teorema de Rolle:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua

f diferenciável em (a,b)

Se $f(a) = f(b)$ então $\exists\, c \in (a,b)$ tq. $f'(c) = 0$

- Teorema valor médio

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua

f dif. em (a,b)

Então $\exists\, c \in (a,b)$ tq. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Seja $x \neq a$, $x \in I$ fixo.

$\forall t \in I$ considere a função auxiliar:

$$\begin{cases} g(t) := f(x) - f(t) - \dfrac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) - \dfrac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 \\ \qquad - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - r_n(x)\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \end{cases}$$

Temos:

$g(x) = g(a) = 0$ (*)

Seja então

$$g'(t) = \cancel{f'(t)} - \cancel{f'(t)} - $$

x é fixo → 0

$$- \frac{f''(t)}{1!}\cancel{(x-t)} + \cancel{\frac{f'(t)}{1!}}$$

$$- \frac{f'''(t)}{2!}\cancel{(x-t)^2} + \cancel{\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)}$$

$$- \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \cancel{\frac{f'''(t)}{3!}3(x-t)^2}$$

$$+ \cdots +$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \cancel{\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}}$$

$$+ r_n(x)\,(n+1)\,\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$\therefore$

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + r_n(x)(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

De (*) e usando o Teorema de Rolle:

→ ∃ t_x entre a e x (i.e. $a < t_x < x$ ou $x < t_x < a$)

tq.

$$g'(t_x) = 0 = -\frac{f^{(n+1)}(t_x)\,(t_x - t)^n}{n!} +$$

$$+\, r_n(t_x)\,(n+1)\,\frac{(t_x - t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$\therefore \boxed{r_n(t_x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}} \quad (*)$$

Obs.:

→ Note que o resultado foi demonstrado supondo que existe $f^{(n+1)}(a)$ $\forall x \in I$ (I intervalo aberto contendo a), i.e., não precisaríamos ter $f(x)$ infinitamente diferenciável em I.

→ No entanto, se f for infinitamente diferenciável em I então existirá $f^{(n+1)}(a)$ $\forall x \in I$ e podemos usar este resultado para escrever $r_n(t_x)$ pela fórmula $(*)$.

Ex: Mostre que

$$\circledast \begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots \\ \quad = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução

$f(x) = \sin x$ (Da forma que queremos obter trata-se de uma série de Taylor em torno de $x=0$)

Série de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f^{(0)}(x) = \sin x \longrightarrow f^{(0)}(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \longrightarrow f^{(2)}(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$

etc.

$$\begin{cases} f^{(2k)}(0) = 0 \\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\therefore \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \quad |x| < R$$

$\downarrow$
?

Para mostrar que $f(x) = \sin x$ tem a representação acima $\forall x \in \mathbb{R}$ basta mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

→ Seja a expressão de $r_n(x)$ dada pela fórmula de Lagrange:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$ com <u>t_x entre 0 e x</u>.

$\therefore$ $$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\overset{\downarrow \text{fixo}}{t_x})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0 .$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 , \quad q \in \mathbb{R} \right)$$

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Ex.

$f(x) = \ln(1+x)$

Obtenha a série de Taylor de f

<u>Solução</u>

$$f(x) = \ln(1+x) \longrightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \longrightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{+2}{(1+x)^3} \longrightarrow f'''(0) = +2 = +2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4} \longrightarrow f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \longrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

→ Analisemos agora a convergência da série:

$$r_n(x) = \ln(1+x) - P_n(x)$$

Fórmula de Lagrange:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \quad \underline{t_x \text{ entre } 0 \text{ e } x}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{n} \right|$$

Mas: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| x \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$

e $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Logo,

se $|x|<1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right| = 0$

$$\therefore \boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x|<1}$$