**Cálculo 2 - Lista 4**

~~Use o critério de Cauchy para analisar a convergência das séries nos exercícios 12- 16~~

1. Seja $\{s_n\}$ uma sequência de números reais. Mostre que esta sequência converge para um número $S$ se e somente se a série $s_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(s_n - s_{n-1})$ converge e tem soma $S$.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge, o que se pode dizer das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

3. Se $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge, o que se pode dizer das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

4. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n} + a_{2n-1})$ converge, o que se pode dizer da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

5. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o que se pode dizer da série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n} + a_{2n-1})$?

6. Se ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, o que se pode afirmar da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

7. Seja $\{s_n\}$ uma sequência crescente de termos positivos. Mostre que $\{s_n\}$ é a soma parcial de uma série de termos positivos.

8. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos convergente. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente. Vale a recíproca? Não

9. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos convergente. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ é convergente. Vale a recíproca? Sim

10. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries absolutamente convergentes. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é absolutamente convergente. Vale a recíproca? Não

11. Demonstrar que se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes e $a_n \leq c_n \leq b_n$, $n \in N$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente. O que se pode afirmar da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem divergentes?
(Note que não se pode usar o teste da comparação I pois o mesmo se aplica a séries com termos positivos]

    Use o critério de Cauchy para analisar a convergência das séries nos exercícios 12- 16

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $(|a_n| < 10)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

1.

$\{s_n\}$ : seq. números reais

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \quad \text{sse} \quad s_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) = S$$

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. (1)

Queremos mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \doteq \sum_{k=2}^{\infty} s_k - s_{k-1} = S - s_1.$$

Seja $\{\varphi_k\}_{k\geq 2}$ a seq. das somas parciais da série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, $a_n := s_k - s_{k-1}$.

Temos:

$$\varphi_1 = s_2 - s_1$$

$$\varphi_2 = s_3 - s_2 + s_2 - s_1 = s_3 - s_1$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = s_{n+1} - s_1$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_1)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_{n+1}}_{S} - s_1$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_n = S - s_1$$

$$\therefore s_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = S$$

$$\boxed{s_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) = S}$$

$(\Longleftarrow)$ Seja $s_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) = S$

Se a série $\sum_{k=2}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) = S - s_1$

é convergente temos

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \varphi_n = S - s_1 \\ \text{com } \varphi_n = s_{n+1} - s_1 \end{cases}$$

$\{\varphi_n\}$ seq. das somas parciais.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = S - s_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_1) = S - s_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = S$$

$$\therefore \boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = S}$$

2. Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ convergente.

Não se pode dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

De facto:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

Ambas séries divergem, embora tenhamos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Convergente

3. Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergente

Já vimos que:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergem então} \\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ converge.} \end{array} \right.$

O que é logicamente equivalente ao enunciado:

$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ diverge então} \\ \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge ou } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{array} \right.$

4. Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n-1}) \text{ convergente}$$

$\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ : seq. somas parciais

$\tilde{S}_1 = a_2 + a_1$

$\tilde{S}_2 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1$

$\tilde{S}_3 = a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$

$\vdots$

$\tilde{S}_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n-1})$ convergente sss

$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$ = existe.

---

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\{S_n\}$ : seq. soma parcial

Vemos que $\{\tilde{S}_n\}$ é uma subsequência de $\{S_n\}$ i.e.,

$$\tilde{S}_n = S_{2n}$$

Logo, o fato de $\{S_{2n}\}$ convergir não garante que $\{S_n\}$ converge.

i.e.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n-1}) \text{ converge não garante que } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}$$

---

5. Só se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então $\{S_n\}$ converge, o que implicaria $\{S_{2n}\}$ converge ∴

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}-a_{2n-1} \text{ converge}$$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem.

→ Sejam $a_n \geq 0$ , $b_n \geq 0$.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ com $c_n := a_n b_n$.

Por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\therefore$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ m \geq n > n_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \sqrt{\varepsilon} \quad (*) \end{cases}$$

Também, por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

$\therefore$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ m > n > n_0' \Rightarrow \\ \Rightarrow |b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| < \sqrt{\varepsilon} \quad (**) \end{cases}$$

Seja então

$\varepsilon > 0$.

Tome $n_0^* = \min\{n_0, n_0'\}$.

Então,

$\forall\, m > n > n_0^*$

considere

$$|c_n + c_{n+1} + \cdots + c_m| =$$

$$= |a_n b_n + \cdots + a_m b_m| <$$

$$\leq \overbrace{|a_n + \cdots + a_m|}\ \overbrace{|b_n + \cdots + b_m|}$$

$$< \sqrt{\varepsilon} \quad \cdot \quad \sqrt{\varepsilon} \quad = \quad \varepsilon$$

i.e.,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0^* = \min\{n_0, n_0'\}$,

$$m > n > n_0^* \Rightarrow |a_n b_n + \cdots + a_m b_m| < \varepsilon$$

$\therefore$ $\left\|\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge } \left(\text{sendo } \begin{matrix} a_n \geq 0 \\ b_n \geq 0 \end{matrix}\right) \right\|$

• Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Temos que $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ é sequência decrescente não negativa e com $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, logo do teste da série alternada tem-se

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

No entanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}}$$

Isto é,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente

não implica que se tenha

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergente.

7. Seja $\{s_n\}$ sequencia tal que

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} < \dots$$

Defina:

$$\begin{cases} a_1 := s_1 \\ a_2 := s_2 - s_1 > 0 \\ a_3 := s_3 - s_2 > 0 \\ \vdots \\ a_n := s_n - s_{n-1} > 0 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos que tem $\{s_n\}$ como sequência de somas parciais.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $a_n \geq 0$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ m > n > n_0 \Rightarrow \\ |a_n + \dots + a_m| < \sqrt{\varepsilon} \end{cases} \quad (*)$$

Mas

$|a_n^2 + \dots + a_m^2| \leq$

$\leq |a_n + \dots + a_m| \, |a_n + \dots + a_m| < \varepsilon$

$\therefore$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ m > n > n_0 \Rightarrow$

$|a_n^2 + \dots + a_m^2| < \varepsilon$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.

→ Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergente,

por exemplo $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$

$a_n = \frac{1}{n}$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

9. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $a_n \geq 0$.

Lembremos a desigualdade

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \quad (*)$$

$(x, y > 0)$

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente

temos $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ convergente

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + a_{n+1})}{2}$ é convergente $(**)$

De $(*)$ tem-se:

$$0 < \sqrt{a_n a_{n+1}} < \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \quad (***)$$

De $(**)$, $(***)$ e do teste da comparação

I tem-se que

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ é convergente.

→ Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ convergente.

De ⊛ tem-se:

$$0 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

$$\therefore \quad 0 < \frac{1}{2} \frac{a_{n+1} + a_n}{a_n a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

$$\therefore \quad 0 < \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}\,(a_n a_{n+1})$$

$$\therefore \quad 0 < \frac{1}{2} a_n < \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}\,(a_n a_{n+1}) \qquad (\ast\ast 1)$$

Mas,

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ convergente $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}^{\,2}$ convergente <u>(Ex. 8)</u>

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ convergente

Mas

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \ \text{convergente}, \ \text{e} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \ \text{convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \, a_n a_{n+1} \ \text{convergente} \qquad (5*)$$

De (****), (5*) e do teste da comparação I segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n \ \text{é convergente}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{é convergente}$$

10.

Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ absolutamente convergente}$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ converge}$$

Do exercício (6) já vimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \text{ converge}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \text{ converge}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ é absolutamente convergente}$$

Não vale a recíproca. Por exemplo, seja $a_n = b_n = \frac{1}{n}$. Temos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (absolutamente) mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, logo não é absolutamente convergente.

11. Sejam

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente} \\ a_n \leq c_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (*) \end{cases}$$

Dado $m > n$ temos de $(*)$:

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m \leq c_n + c_{n+1} + \ldots + c_m \leq$$

$$\leq b_n + b_{n+1} + \ldots + b_m$$

Logo

$$(1) \quad |c_n + c_{n+1} + \ldots + c_m| \leq \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_n + \ldots + a_m|, \\ |b_n + \ldots + b_m| \end{array} \right\}$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente tem-se:

$$(2) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad m > n > n_0 \Rightarrow |a_n + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente tem-se:

$$(3) \quad \exists n_0' \in \mathbb{N}, \quad m > n > n_0' \Rightarrow |b_n + \ldots + b_m| < \varepsilon$$

11. Cont.

Seja $n_0^* = \text{Max}\{n_0, n_0'\}$

Então de (1), (2) e (3) tem-se:

$$|c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n| < \varepsilon$$

$\therefore$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0^* \text{ t.q. } m > n > n_0^* \Longrightarrow$$

$$|c_m + c_{m+1} + \cdots + c_n| < \varepsilon$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente.

11. Cont.

Nada se pode afirmar da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ no caso em que se tem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentes.

Com efeito, seja

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n^2}$$

Então

$$a_n < c_n < b_n$$

e no entanto $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Seja também

$$a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad c_n = \frac{1}{n}$$

então $a_n < c_n < b_n$

e no entanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

# Critério de Cauchy

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $|a_n| < 10$.

Queremos mostrar que

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $m > n > n_0 \Rightarrow$

$|a_n + \dots + a_m| < \varepsilon$

Notamos que:

$$\left|\frac{a_n}{10^n} + \dots + \frac{a_m}{10^m}\right| \leq \left|\frac{a_n}{10^n}\right| + \dots + \left|\frac{a_m}{10^m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{10^{n-1}} + \dots + \frac{1}{10^{m-1}}$$

Seja $S = \frac{1}{10^{n-1}} + \dots + \frac{1}{10^{m-1}}$

$$\frac{1}{10} S = \frac{1}{10^n} + \dots + \frac{1}{10^m}$$

$$\therefore S - \frac{1}{10} S = \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^m}$$

$$\frac{9}{10} S = \frac{10^m - 10^{n-1}}{10^{m+n-1}} = \frac{10^{n-1}(10^{m-n+1} - 1)}{10^{m+n-1}}$$

$\therefore \frac{9}{10} S = \frac{1}{10^m}\left(10^{m-n+1} - 1\right)$

$\therefore S = \frac{1}{9.10^{m-1}} \underbrace{\left(10^{m-n+1} - 1\right)}_{>1 \text{ (pois } m>n)} =$

$\therefore$

$$\left|\frac{a_n}{10^n} + \dots + \frac{a_m}{10^m}\right| < \frac{1}{9.10^{m-1}}\left(10^{m-n+1} - 1\right) <$$

$$< \frac{1}{9.10^{m-1}} 10^{m-n+1} =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{10^{n-2}} = \frac{10^2}{9} \frac{1}{10^n}$$

$n > n_0$

$$= \frac{10^2}{9} \frac{1}{10^{n_0}}$$

$$= \frac{1}{9\,10^{n_0-2}}$$

$\therefore$

$$\left|\frac{a_n}{10^n} + \dots + \frac{a_m}{10^m}\right| < \frac{1}{9\,10^{n_0-2}} < \varepsilon$$

$\therefore \quad 10^{n_0-2} > \frac{1}{9\varepsilon} \Rightarrow (n_0 - 2) > \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon}$

$$\left\| n_0 > 2 + \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon} \right\|$$

Temos então:

Seja $\varepsilon > 0$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 > 2 + \log_{10} \frac{1}{9\varepsilon}$

Então, $\forall\, m > n > n_0$ tem-se:

$$\left| \frac{a_n}{10^n} + \dots + \frac{a_m}{10^m} \right| < \frac{1}{10^{n-1}} + \dots + \frac{1}{10^{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 10^{m-1}} \left( 10^{m-n+1} - 1 \right) <$$

$$< \frac{1}{9 \cdot 10^{m-1}} 10^{m-n+1} = \frac{10^2}{9} \frac{1}{10^n} < \frac{10^2}{9} \frac{1}{10^{n_0}} =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{10^{n_0 - 2}} < \frac{1}{9} \frac{1}{10^{\log_{10} \frac{1}{9\varepsilon}}} = \frac{1}{9 \cdot \frac{1}{9\varepsilon}} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad \left| \frac{a_n}{10^n} + \dots + \frac{a_m}{10^m} \right| < \varepsilon$$

$\therefore \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (|a_n| < 10)$ converge.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$

Assuma: $m > n > n_0$. Daí

$$|a_n + \dots + a_m| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} + \dots + \frac{\sin mx}{2^m} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\sin nx|}{2^n} + \dots + \frac{|\sin mx|}{2^m} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

Seja

$$S = \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$\therefore \quad S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m+1}}$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{2^{m+1} - 2^n}{2^{n+m+1}}$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{\cancel{2^n}\left(2^{m+1-n} - 1\right)}{2^{m+\cancel{n}+1}}$$

$$S = \frac{2}{2^{m+1}} \left(2^{m+1-n} - 1\right) = \frac{2^{m+1-n} - 1}{2^m}$$

$\therefore \quad |a_n + \dots + a_m| \le \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^m} =$

$$= \frac{2^{m+1-n} - 1}{2^m} < \frac{2^{m+1-n}}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$$

$$\therefore \quad 2^{n_0-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore \left\| n_0 > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\|$$

$\rightarrow$ Seja $\varepsilon > 0$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n_0 > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Então $m > n > n_0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow |a_n + \dots + a_m| = \left| \frac{\sin nx}{2^n} + \dots + \frac{\sin mx}{2^m} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^m} = \frac{2^{m+1-n} - 1}{2^m} <$$

$$< \frac{2^{m+1-n}}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n_0-1}} = \frac{1}{2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\therefore$

$|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

14. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots +$

$+ \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$

Temos

$a_n + a_{n+1} + \dots + a_m =$

$= \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \dots$

$+ \dots + \frac{\cos mx - \cos(m+1)x}{m}$

$= \frac{\cos nx}{n} - \frac{\cos(n+1)x}{n(n+1)} -$

$- \frac{1 \cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \dots - \frac{\cos mx}{(m-1)m} - \frac{\cos(m+1)x}{m}$

$\therefore \quad |a_n + \dots + a_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$+ \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m} =$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \cancel{\frac{1}{m}} + \cancel{\frac{1}{m}} =$

$\therefore$

$$|a_n + \dots + a_m| \leq \frac{2}{n}$$

Assim, vemos que dado $\varepsilon > 0$ temos:

$$|a_n + \dots + a_m| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

se pusermos $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $2 < n_0 \varepsilon$

então: $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$

e $n > n_0 \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Prova:

Seja $\varepsilon > 0$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Seja $m > n > n_0$.

Então

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| =$$

$$= \left| \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos mx - \cos(m+1)x}{m} \right|$$

$|a_n + \cdots + a_m| =$

$$= \left| \frac{\cos nx}{n} - \frac{\cos(n+1)x}{n(n+1)} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \right.$$

$$\left. - \frac{\cos mx}{(m-1)m} - \frac{\cos(m+1)x}{m} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cancel{- \frac{1}{(n+1)}} + \cancel{\frac{1}{(n+1)}} - \cancel{\frac{1}{(n+2)}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{m-1}} - \cancel{\frac{1}{m}} + \cancel{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

i.e.

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \left( \frac{2}{n_0} < \varepsilon \right),$

$\forall m, n > n_0 \Rightarrow |a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é série convergente}}$

15. $\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos^2 x}{2^2} + \dots + \dfrac{\cos x^n}{n^2}$

Seja $m > n$. Temos:

$|a_n + \dots + a_m| =$

$$= \left| \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots + \frac{\cos x^m}{m^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{m(m-1)}$$

$$= \frac{1}{n-1} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m-2} - \cancel{\frac{1}{m-1}} + \cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{(n-1)m} < \frac{m}{(n-1)m} = \frac{1}{n-1}$$

$(m > n \geq 1$
$m - n \geq 1)$

Basta impor que $\dfrac{1}{n-1} < \varepsilon$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\dfrac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon$

Prova

Seja $\varepsilon > 0$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon$. $(n_0 > 1)$

Seja $m > n > n_0$.

Então

$$|a_n + \dots + a_m| =$$

$$= \left| \frac{\cos x^n}{n^2} + \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\cos x^{m-1}}{(m-1)^2} + \frac{\cos x^m}{m^2} \right|$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{<} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{<} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)n} + \dots + \frac{1}{(m-1)(m-2)} + \frac{1}{m(m-1)} =$$

$$< \frac{1}{n-1} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m-2} - \cancel{\frac{1}{m-1}} + \cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}$$

$$< \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{(n-1)m}$$

Mas $m > n > n_0 > 1$

$\therefore m - n \geq 1 \quad \therefore m - n + 1 \geq 2$

$\therefore m \geq m - n + 1$

$\therefore$

$$\frac{m-n+1}{(n-1)m} \leq \frac{\cancel{m}}{(n-1)\cancel{m}} = \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

$\therefore$

$$|a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

i.e.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \left( \frac{1}{n_0 - 1} < \varepsilon \right),$

$\forall m > n > n_0 \Rightarrow |a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon$

$\therefore$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(A série diverge)

Seja $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Tome $2n > n+1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$|a_{n+1} + \dots + a_{2n}| =$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right|$$

$$\geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

Logo, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}}$.