Cálculo C - Lista 1

(1) Funções vetoriais

Determine o domínio e as componentes das funções vetoriais a seguir

1. $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$
2. $\vec{F}(t) = \sqrt{t+1}\,\vec{i} + \sqrt{t-1}\,\vec{j} + \vec{k}$
3. $\vec{F}(t) = \tanh t\,\vec{i} - \frac{1}{t^2-4}\,\vec{k}$
4. $\vec{F}(t) = [(t^2-1)\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + \cot t\,\vec{k}] \times [(4-t^2)\,\vec{i} + e^{-5t}\,\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}]$
5. $\vec{F}(t) = (t\,\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - t^2\vec{j} + 2\sqrt{t}\,\vec{k})$
6. $\vec{F} - \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = 2t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - \ln t\,\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + 2t\vec{k}$
7. $2\vec{F} - 3\vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$
8. $\vec{F} \times \vec{G}$ com $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$
9. $\vec{F} \times \vec{G}$ onde $\vec{F}(t) = t\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{t}}\,\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = (t - \sin t)\,\vec{i} + (1 - \cos t)\,\vec{j}$.
10. $f\vec{F}$ onde $\vec{F}(t) = \ln t\,\vec{i} - 4e^{2t}\vec{j} + \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\vec{k}$, $\quad f(t) = \sqrt{t}$.
11. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \sqrt{t+2}\,\vec{k}$, $\quad g(t) = t^{\frac{1}{3}}$
12. $\vec{F} \circ g$, onde $\vec{F}(t) = e^{-2t}\vec{i} + e^{(t^2)}\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\quad g(t) = \ln t$

(2) Limites e continuidade de funções vetoriais

Calcule os limites caso existam

13. $\lim_{t\to 4}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$
14. $\lim_{t\to -1}(3\vec{i} + t\vec{j} + t^5\vec{k})$
15. $\lim_{t\to \pi}(\tan t\,\vec{i} + 3t\vec{j} - 4\vec{k})$
16. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\vec{i} + e^t\vec{j} + (t+\sqrt{2})\vec{k}\right)$
17. $\lim_{t\to 2}\vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} 5\vec{i} - \sqrt{2t^2+2t+4}\,\vec{j} + e^{-(t-2)}\,\vec{k}, & t < 2 \\ (t^2+1)\vec{i} + (4-t^3)\vec{j} + \vec{k}, & t > 2 \end{cases}$$

18. $\lim_{t\to 0}\vec{F}(t)$ com

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t\,\vec{i} + e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{j} + t^2\vec{k}, & t \neq 0 \\ \vec{j}, & t = 0 \end{cases}$$

19. $\lim_{t\to 0}(\vec{F} - \vec{G})$ com $\vec{F}(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = -\pi\,\vec{i} + \frac{1+\cos t}{t}\vec{j}$
20. $\vec{F} \cdot \vec{G}$ com $\vec{F}(t) = \frac{\sin(t-1)}{t-1}\vec{i} + \frac{t+3}{t-2}\vec{j} + \cos \pi t\vec{k}$, $\quad \vec{G}(t) = (t^2+1)\vec{i} - \frac{t-2}{t+3}\vec{j} - \sqrt{t^2+1}\vec{k}$

21.

$$\lim_{t\to 3}\left(\frac{t^2-5t+6}{t-3}\vec{i}+\frac{t^2-2t-3}{t-3}\vec{j}+\frac{t^2+4t-21}{t-3}\vec{k}\right)$$

22.

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2+1}{t-1}\vec{i}+\frac{t^2-1}{t+1}\vec{j}+\frac{t^2+7t-8}{t-1}\vec{k}\right)$$

23.

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{\ln t}{t-1}\vec{i}-\frac{e^t-e}{t-1}\vec{j}+\frac{t+1}{t^2}\vec{k}\right)$$

24.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\vec{i}+\frac{t-1}{t+1}\vec{j}-\frac{\sinh t}{t}\vec{k}\right)$$

25.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\ \vec{i}+\frac{1-\cos t}{t}\vec{j}+e^{2t}\vec{k}\right)$$

26.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{t}\ \vec{i}+\frac{\tan 2t}{3t}\vec{j}+\ln(1+t)\vec{k}\right)$$

27.

$$\lim_{t\to 3}\left\{\left(\frac{9-t^2}{3-t}\right)\vec{i}+\left(\frac{t^2+t-12}{t-3}\right)\vec{j}+\left(\frac{t^3-13t+12}{t-3}\right)\vec{k}\right\}$$

28. $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\ \vec{i}+\frac{t-1}{t+1}\ \vec{j}+\frac{\sin t^3}{t^2}\ \vec{k}\right)$

29. $\lim_{t\to 0^+}\left(t\ \vec{i}+2t^{\frac{1}{4}}\vec{j}-\frac{\ln t}{t}\ \vec{k}\right)$

30. $\lim_{t\to 1^+}\left(e^{\frac{1}{1-t}}\vec{i}+\sqrt{t-1}\ \vec{j}+\ln t\ \vec{k}\right)$

31. $\lim_{t\to 1^-}\left(\sqrt{1-t}\ \vec{i}-(1-t)\ \ln(1-t)\ \vec{j}\right)$

Determine os intervalos onde as funções vetoriais são contínuas

32. $\vec{F}(t)=4t\ \vec{j}-\sqrt{5}\ \vec{k}$

33.

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t}\ \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, & t<0\\ (t^2+1)\vec{i}+\ln(t+3)\vec{j}+\vec{k}, & t\geq 0\end{cases}$$

34.

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}(2t+1)\ \vec{i}+(2t-1)\ \vec{j}+4t\ \vec{k}, & t<-3\\ (t-2)\ \vec{i}-(t+10)\ \vec{j}+(2t-9)\ \vec{k}, & t\geq -3\end{cases}$$

35.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t\,\vec{i} + (3t-2)\,\vec{j} + (3-t)\,\vec{k}, & -\infty < t < 2 \\ 2\,\vec{i} + (2+t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}, & 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

36.

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} t^2\,\vec{i} + (3-t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}, & -\infty < t < 1 \\ t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + (2-t^2)\,\vec{k}, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

(3) Derivadas de funções vetoriais

Encontre as derivadas das funções vetoriais a seguir

37. $\vec{F}(t) = t\,\vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{j}$

38. $\vec{F}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + t^{-\frac{3}{2}}\vec{j} + \ln(2t-1)\vec{k}$

39. $\vec{F}(t) = \arcsin t\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j} + e^{-t^3}\vec{k}$

40. $\vec{F}(t) = e^{\sqrt{t}}\,\vec{i} + 3\vec{j} - \arccos 2t\,\vec{k}$

41. $\vec{F}(t) = \tan t\,\vec{i} + \vec{j} + \sec t\,\vec{k}$

42. $\vec{F}(t) = e^t \cos t\,\vec{i} - e^t \sin t\,\vec{k}$

43. $\vec{F}(t) = \cosh t\,\vec{i} + \sinh t\,\vec{j} - \sqrt{t}\,\vec{k}$

    Sejam $f(t) = t^2 + 3$, $g(t) = 2t^3 - 3t$, $\vec{u}(t) = t\,\vec{i} - t^2\vec{j} + 2t\,\vec{k}$, e $\vec{v}(t) = \vec{i} - 2t\,\vec{j} + 3t^2\vec{k}$. Determine

44. $\frac{d\vec{u}}{dt}$

45. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{v}(t))$

46. $\frac{d}{dt}(g(t)\vec{u}(t))$

47. $\frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v})$

48. $\frac{d}{dt}(\vec{u} \times t\vec{v})$, $\frac{d}{dt}(t\vec{u} \times \vec{v})$, $\frac{d}{dt}(t(\vec{u} \times \vec{v}))$

49. $\frac{d}{dt}(2\vec{u} \cdot \vec{v})$

50. $\frac{d}{dt}(3\vec{u} + 4\vec{v})$

51. $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u} + g(t)\vec{v})$

52. $u \times \frac{d\vec{v}}{dt} - f(t)\vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$

53. Prove que para funções diferenciáveis $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{w}(t)$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}\right) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \times \vec{w} \;+\; \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} \;+\; \vec{u} \cdot \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt}$$

54. Seja $\vec{u}(t)$ uma função diferenciável com comprimento constante (isto é $|\vec{u}| = \text{cte}$ para todo $t \in \text{dom}\,\vec{u}$). Mostre que em qualquer ponto onde ocorre $\frac{d\vec{u}}{dt} \neq 0$ tem-se $\frac{d\vec{u}}{dt}$ perpendicular a $\vec{u}$. Qual a interpretação física desse resultado?

55. Seja $\vec{v} = \vec{v}(s)$ uma função diferenciável e $s = s(t)$ uma função escalar diferenciável. Mostre que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

(Regra da cadeia para a diferenciação de funções vetoriais)

56. O teorema do valor médio para funções de uma variável diz que: se $f : [a,b] \subset R \to R$ é contínua e diferenciável para todo $t \in (a,b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que se tem $\frac{df}{dt}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Verifique se vale um resultado semelhante para funções vetoriais, isto é, dada uma função vetorial $\vec{F} : [a,b] \to R^3$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ satisfazendo

$$\vec{F}\,'(c) = \frac{\vec{F}(b) - \vec{F}(a)}{b-a} \ ?$$

57. Seja $\vec{F}(t) = \sin t\,\vec{i} - \cos t\vec{j}$. Mostre que para todo $t \in R$ os vetores $\vec{F}(t)$ e $\vec{F}''(t)$ são paralelos.

58. Mostre que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{F} \times \vec{F}'\right) = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)$$

59. Suponha que $\vec{F}(t)$ é paralelo á $\vec{F}''(t)$ para todo t. Mostre que $\vec{F} \times \vec{F}'$ é constante.

(4) Integrais de funções vetoriais

Calcule as integrais das funções vetoriais a seguir

60. $\int dt\,\left(t^2\vec{i} - (3t-1)\vec{j} - \frac{1}{t^3}\vec{k}\right)$

61. $\int dt\,\left(t\cos t\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + 3t^4\,\vec{k}\right)$

62. $\int_a^b dt\,(t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} - t^3\,\vec{k})$

63. $\int_0^1 dt\,(t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k})$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt\,\left(\cos t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j} + \cos^2 t\,\vec{k}\right)$

65. $\int_1^4 dt\,(e^t\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \ln 2t\,\vec{k})$

66. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^t ds\,\left(s\tan s^3\,\vec{i} + \cos e^s\,\vec{j} + e^{(s^2)}\,\vec{k}\right)$. Encontre $\frac{d}{dt}\vec{F}(t)$.

67. Seja $\vec{F}(t) = \int_0^{t^2} ds\,\left(\cos s\,\vec{i} + e^{-(s^2)}\vec{j} + \tan s\,\vec{k}\right)$. Encontre $\frac{d}{dt}\vec{F}(t)$.