Cálculo C - Lista 11

Equações exatas - fator integrante

Mostre que a função dada é um fator integrante da equação e resolva a equação. Verifique também que equações são de variáveis separáveis e resolva-as aplicando esse método. Compare os resultados.

1. $2y\,dx + x\,dy = 0; \quad x$
2. $x\,dy - y\,dx = 0; \quad 1/x^2$
3. $\sin y\,dx + \cos y\,dy = 0; \quad e^x$
4. $y^2\,dx + (1+xy)dy = 0; \quad e^{xy}$

Para cada uma das equações a seguir verifique que a condição

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv f(x)$$

é satisfeita. Resolva então a equação usando um fator integrante $F(x) = e^{\int f(x)dx}$.

5. $2\,dx - e^{y-x}dy = 0$
6. $x\cosh y\,dy - \sinh y\,dx = 0$
7. $(y+1)dx - (x+1)dy = 0$
8. $(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
9. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$

Para cada uma das equações a seguir verifique que a condição

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \equiv g(y)$$

é satisfeita. Resolva então a equação usando um fator integrante $F(y) = e^{\int g(y)dy}$.

10. $\cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$
11. $2\cosh x\cos y\,dx = \sinh x\sin y\,dy$
12. $y\,dx + (3+3x-y)\,dy = 0$
13. $2x\tan y\,dx + \sec^2 y\,dy = 0$
14. $y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0$

Resolva as equações usando um fator integrante do tipo $F(x)$ ou $F(y)$.

15. $(2\cos y + 4x^2)\,dx = x\sin y dy$
16. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$
17. $(3xe^y + 2y)dx + (x^2e^y + x)\,dy = 0$
18. Mostre que se a equação $M dx + N dy = 0$ for tal que

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = f(xy)$$

então ela admite um fator integrante do tipo $e^{\int f(u)du}$ onde $u = xy$.

19. Use o método do exercício anterior para resolver a equação

$$(y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy = 0$$

20. Resolva

$$(2y^2 + 4x^2y)\,dx + (4xy + 3x^3)\,dy = 0$$

sabendo que existe um fator integrante da forma $F(x,y) = x^a y^b$ com a, b constantes.