Cálculo C - Lista 12

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Notação:

Equação homogênea: $y' + p(x)y = 0 \ \ (*)$

Equação não-homogênea: $y' + p(x)y = r(x) \ \ (**)$

Resolva as equações

1. $y' + 2y = x^2 + 2x$
2. $y' - y = 2$
3. $y' - 2y = 1 - 2x$
4. $xy' + y = 2x$
5. $y' + ky = e^{-kx}$
6. $y' = 2y/x + x^2e^x$
7. $y' - 4y = x - 2x^2$
8. $xy' + 2y = 2e^{x^2}$
9. $y' + 2xy = -6x$

Resolva os problemas de valor inicial

10. $y' + y = (x+1)^2; \ y(0) = 0$
11. $y' - 2y = 2\cosh 2x + 4; \ y(0) = -5/4$
12. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2; \ y(1) = e - 1$
13. $y' = 2(y-1)\tanh 2x; \ y(0) = 4$

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear homogênea $(*)$.

14. $y \equiv 0$ é solução de $(*)$ [$y \equiv 0$ é dita solução trivial].
15. Se y_1 é solução de $(*)$ então $y = cy_1 \ \ (c \in R)$ também é solução.
16. Se y_1, y_2 são soluções de $(*)$ então $y = y_1 + y_2$ também é solução. [No caso mais geral $y = c_1y_1 + c_2y_2$ $(c_1, c_2 \in R)$ também será solução de $(*)$ $\forall c_1, c_2 \in R$]

Nos exercícios a seguir prove as seguintes propriedades das soluções da equação linear não-homogênea $(**)$.

17. Se y_1 é uma solução de $(**)$ e y_2 é uma solução de $(*)$ então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de $(**)$.
18. A diferença $y = y_1 - y_2$ de duas soluções y_1, y_2 de $(**)$ é uma solução de $(*)$.
19. Se y_1 é uma solução de $(**)$ então $y = cy_1$ é uma solução de $y' + py = cr$.
20. Se y_1 é uma solução de $y_1' + py_1 = r_1$ e y_2 é uma solução de $y_2' + py_2 = r_2$ (com a mesma função p) então $y = y_1 + y_2$ é uma solução de $y' + py = r_1 + r_2$.
21. Se $p(x)$ e $r(x)$ são funções constantes, digamos $p(x) = p_0$ e $r(x) = r_0$, então $(**)$ pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Determine a solução e mostre que ela coincide com

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^h r\,dx + C\right] \quad \text{com } h \equiv \int p(x)dx$$

Resolva as equações de Bernoulli

22. $y' + y = xy^{-1}$
23. $3y' + y = (1-2x)y^4$
24. $y' + xy = xy^{-1}$