Cálculo C - Lista 3

Campos escalares e vetoriais

Gradiente, divergência e rotacional

1. Calcule a divergência e rotacional do campo vetorial abaixo

   (a) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

   (d) $\vec{F}(x,y,z) = -\frac{x}{z}\vec{i} - \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$

   (e) $\vec{F}(x,y,z) = e^x \cos y\vec{i} + e^x \sin y\vec{j} + z\vec{k}$

2. Determine se $\vec{F}$ é o gradiente de uma certa função φ. Se for, determine φ.

   (a) $\vec{F}(x,y) = e^y\vec{i} + (xe^y + y)\vec{j}$

   (b) $\vec{F}(x,y) = (\sin xy)\vec{i} + (\cos xy)\vec{j}$

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + (x^2y + 1)\vec{k}$

   (d) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$

   (e) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+x^2)\vec{i} + (z^2+y^2)\vec{j} + (x^2+z^2)\vec{k}$

3. Sejam f e g campos escalares e $\vec{F}$ e $\vec{G}$ campos vetoriais. Determine quais das expressões a seguir representam campos vetoriais, quais representam campos escalares e quais não tem sentido.

   (a) $\nabla(fg)$

   (b) $\nabla\vec{F}$

   (c) $\nabla \times (\nabla f)$

   (d) $\nabla(\nabla \cdot \vec{F})$

   (e) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$

   (f) $\nabla \cdot (\nabla f)$

   (g) $(\nabla f) \times (\nabla \times \vec{F})$

   (h) $\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla f))$

   (i) $\nabla \times (\nabla \cdot (\nabla f))$

Mostrar que

4. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ [o rotacional de um campo vetorial é solenoidal]

5. $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ [o gradiente de um campo escalar é irrotacional]

6. $\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla f) \cdot \vec{F}$

7. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

8. $\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$

9. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

10. Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções com derivadas parciais de segunda ordem contínua. Mostre que $\nabla f \times \nabla g$ é solenoidal.

11. Seja $\vec{F}(x,y,z) = F_1(y,z)\vec{i} + F_2(x,z)\vec{j} + F_3(x,y)\vec{k}$. Mostre que $\vec{F}$ é solenoidal.

12. (a) Encontre constantes a, b, c de modo que o campo vetorial $\vec{F} = (x^2+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$ seja irrotacional.
    (b) Se $\vec{F}$ é irrotacional, encontre um campo escalar $\varphi(x,y,z)$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$.

13. Seja $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ onde $\vec{\omega}$ é um vetor constante, e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Mostre que $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})$.

14. Mostre que se a função $f(x,y,z)$ satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

    então ∇f é campo irrotacional e solenoidal.

15. Seja um campo vetorial $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ definido numa região $\Omega \subset R^3$. Sabemos que se Ω é **simplesmente conexo** então vale que
    $\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla\varphi$.
    O análogo desse resultado no plano se enuncia como: Seja $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ um campo vetorial definido num domínio simplesmente conexo do plano R^2. Tem-se

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla\varphi$$

    Verificaremos agora a importância da região ser simplesmente conexa para valer a implicação $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow \vec{F} = \nabla\varphi$.
    Seja o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

definido em $D = \{(x,y) \in R^3 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

(i) Mostre que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ em } D$$

(ii) Mostre que $\vec{F}$ não se escreve como o gradiente de uma função escalar definida em D.

Respostas

1. a. $\nabla \cdot \vec{F} = 2,\ \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

   b. $\nabla \vec{F} = 0,\ \nabla \times \vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

   c. $\nabla \cdot \vec{F} = 2(x+y+z),\ \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

   d. $\nabla \cdot \vec{F} = -\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2},$
   $\nabla \times \vec{F} = -\frac{y}{z^2}\vec{i} + \frac{x}{z^2}\vec{j}$

2. a. $\vec{F} = \nabla(e^y x + \frac{y^2}{2} + C)$

   b. $\nexists \varphi$

   c. $\vec{F} = \nabla(x^2yz + z + C)$

   d. $\nexists \varphi$

   e. $\nexists \varphi$

3. a. Campo vetorial

   b. Não tem sentido

   c. Campo vetorial

   d. Campo vetorial

   e. Campo vetorial

   f. Campo escalar

   g. Campo vetorial

   h. Campo escalar

   i. Não tem sentido