Cálculo C - Lista 4

Integrais de Linha

Calcule as integrais de linha a seguir

1. $\int_\gamma (9+8y^{\frac{1}{2}})\,ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 2t^{\frac{3}{2}}\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \le t \le 1$.

2. $\int_\gamma y\,ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^3\vec{j}$, $-1 \le t \le 0$.

3. $\int_\gamma 2xyz\ ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$

4. $\int_\gamma (1+\frac{9}{4}z^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\ ds$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t^{\frac{3}{2}}\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{20}{3}$.

5. $\int_\gamma (y+2z)\ ds$. γ é a trajetória triangular formada pelos segmentos de $(-1,0,0)$ a $(0,1,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ e $(0,0,1)$ a $(-1,0,0)$.

Nos exercícios a seguir calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t)$.

6. $\vec{F} = z\vec{i} - y\vec{j} - x\vec{k}$. $\vec{r}(t) = 5\vec{i} - \sin t\vec{j} - \cos t\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

7. $\vec{F} = y\vec{i} + xy\vec{j} + z^3\vec{k}$. $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

8. $\vec{F} = -z\vec{i} + x\vec{k}$. $\vec{r} = \cos(\pi - t)\vec{i} + \sin(\pi - t)\vec{k}$, $0 \le t \le \pi$.

9. $\vec{F} = 5e^{\sin \pi x}\vec{i} - 4e^{\cos \pi x}\vec{j}$. $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} - \ln(\cosh t)\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.

Calcule as integrais de linha dadas na forma $\int F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$

10. $\int_\gamma ydx - xdy + xyz^2dz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

11. $\int_\gamma e^x dx + xydy + xyzdz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (2-t)\vec{i} + (2-t)\vec{j} + 2(2-t)\vec{k}$, $-1 \le t \le 1$.

12. $\int_\gamma xydx + (x+z)dy + z^2dz$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r} = (t+1)\vec{i} + (t-1)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $-1 \le t \le 2$.

13. $\int_\gamma \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{2}{1+y^2}dy$. γ é a parte do círculo unitário passando pelos pontos $(1,0),(0,1)$.

14. $\int_\gamma x\ln(\frac{xz}{y})dx + \cos(\frac{\pi xy}{z})dy$. γ é a curva parametrizada por $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $1 \le t \le 2$.

15. Calcule $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$. γ é a curva parametrizada pelos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,-5,0)$, e de $(0,-5,0)$ a $(0,0,1)$.

16. Seja γ_1 a curva parametrizada por $\vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$ e γ_2 a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \sin t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \sin t\vec{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$. Calcule
$$\int_{\gamma_1} (xy+z)\,ds \ \text{ e } \int_{\gamma_2} (xy+z)\,ds$$
As respostas são iguais? Explique.

17. Seja uma curva parametrizada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \le t \le b$, tal que $x(t) = k$ é constante. Seja $M(x,y,z)$ uma função contínua. Calcule
$$\int_\gamma M(x,y,z)dx$$

Respostas

1. $\frac{26\sqrt{13}}{3}$ 2. $\frac{1}{54}(1-10^{\frac{3}{2}})$
3. $4\sqrt{2}(1-\frac{1}{e})$ 4. $\frac{2032}{63}$ 5. $3\sqrt{2}$
6. $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{21}{4}$ 7. $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{\pi^4}{4}$
8. $-\pi$ 9. 0 10. $-\frac{5}{3}$
11. $e^{-1} - e - \frac{2}{3}$ 12. $\frac{57}{2}$ 13. $\frac{\pi}{4}$
14. $4\ln 2 - \frac{9}{2}$ 15. $\frac{5}{2}$ 16. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
17. 0