

Cálculo C - Lista 5

O teorema fundamental de integrais de linha

Nos exercícios a seguir mostre que as integrais de linha são independentes do caminho, e calcule as integrais.

- $\int_{\gamma} (e^x + y)dx + (x + 2y)dy$ onde γ é qualquer curva suave por partes no plano xy de $(0, 1)$ a $(2, 3)$.
- $\int_{\gamma} ydx + (x + z)dy + ydz$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\vec{i} + \cos \pi t \vec{j} + 2t \sin \pi t \vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.
- $\int_{\gamma} (3x^2 + y)dx + xdy$ onde γ é a reta de $(2, 1, 5)$ a $(-3, 2, 4)$.
- $\int_{\gamma} 3x^2yzdx + x^3zdy + (x^3y - 4z)dz$ onde γ é curva obtida pela interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $y = x$, e indo de $(-1, -1, 1)$ até $(1, 1, -1)$.
-

$$\int_{\gamma} \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} dx + \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2} dy + \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2} dz$$

onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^4\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

- $\int_{\gamma} e^{-x} \ln y dx - \frac{e^{-x}}{y} dy + z dz$ onde γ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t-1)\vec{i} + e^{t^4}\vec{j} + (t^2+1)\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
- Suponha que f, g, h são funções contínuas. Prove que $\int_{\gamma} f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz$ é independente do caminho escolhido.
- Seja $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.
 - Mostre que $\nabla \times \vec{F} = 0$.
 - Seja D uma região no plano que contem o círculo $x^2 + y^2 = 1$ mas não contém a origem. Mostre que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não é independente do caminho em D . [SUGESTÃO: Calcule primeiro $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ e depois $\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ_1 é o semicírculo parametrizado por $\vec{r}_1(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$, e γ_2 é o semicírculo parametrizado por $\vec{r}_2(t) = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.]

- (a) Verifique se a integral de linha

$$\int_{\gamma} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

é independente do caminho no domínio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- Verifique se a integral de linha

$$\int_{\gamma} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz$$

é independente do caminho no domínio $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

- Em que domínio é a integral de linha

$$\int_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

independente do caminho:

- $x > 0$
- $x < 0$
- $y > 0$
- $y < 0$
- $x^2 + y^2 > 0$

- A segunda lei da termodinâmica afirma que a integral de linha

$$I := \int \frac{1}{T}(dU + PdV)$$

é independente do caminho no plano UV .

- As equações de estado de um gás ideal são $PV = nRT$, $U = f(T)$ onde n e R são constantes e $f(T)$ é uma dada função da temperatura. Dessa forma é mais conveniente tomar T e V como variáveis independentes e expressar P e U em termos de T e V . Se isto for feito mostre que

$$I = \int \frac{k}{T} dT + \frac{nR}{V} dV, \text{ onde } k = \frac{dU}{dT}$$

- Uma vez que a integral de linha é independente do caminho existe uma função $S(T, V)$, dita a *entropia*, tal que

$$\int_{\gamma} \frac{k}{T} dT + \frac{nR}{V} dV = S(B) - S(A)$$

onde γ é a curva ligando os pontos A e B . Mostre que se k é constante tem-se

$$S = k \ln T + nR \ln V + S_0$$

onde S_0 é uma constante.

12. Seja g uma função contínua de uma variável e considere

$$\vec{F}(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

(a) Mostre que \vec{F} é conservativo.

[SUGESTÃO: Mostre que $\vec{F} = \nabla f$ onde $f(x, y, z) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2 + z^2)$ e $h(u) = \int g(u)du$]

(b) Mostre que \vec{F} é irrotacional.

Respostas

1. $e^2 + 13$

2. 1

3. -43

4. -2

5. $\ln 2$

6. $\frac{1}{2}$

10.

(a) Independe

(b) Independe

(c) Independe

(d) Independe

(e) Depende